SEZAM, školský rok 2014/15, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
práve sa k vám dostali zadania druhej letnej série tohtoročného SEZAMu. Indiáni Aleka, Mette, Soren a Kuruk sa veľmi potešili vašim riešeniam. Na oplátku vás čakajú ďalšie príhody z ďalekého západu a nové úlohy. Ak si chcete predtým než sa do nich pustíte rozhýbať svoje matematické svaly, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na vynovenej stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Kaťa Jasenčáková)

Našou úlohou je vyrobiť čo najviac dresov z číslic 1 až 9 a pritom každú číslicu použiť práve raz. Preto chceme vyrábať dresy s číslami, ktoré budú mať čo najmenej cifier. Čísla od 1 do 9 deliteľné tromi sú iba 3, 6 a 9.
Ostalo nám 6 číslic. Ak by sa nám z nich podarilo vyrobiť tri dvojciferné čísla deliteľné tromi, mali by sme 6 dresov. A naozaj to ide, napr. čísla 12, 45 a 78 sú deliteľné tromi.
Kamaráti vedia vyrobiť najviac 6 dresov. Môžu byť na nich napríklad čísla 3, 6, 9, 12, 45 a 78.

Príklad č. 2 (opravovala Baška Marečáková)

Ako každá úloha, aj táto má viacero ciest ku správnemu riešeniu. Niektorí z Vás rozobrali všetky možnosti, ako sa dalo po ihrisku pohybovať, čo je samozrejme správne. My si však ukážeme, ako sa dá rozoberanie možností skrátiť.
Našu cestu začíname na políčku A, z ktorého sa dá prejsť na políčka B1 a B2 ako na obrázku nižšie. Dostávame prvé rozvetvenie možností.

V	C1	B1	A
E1	D1	C2	B2
F1	E2	D2	C3

Cesta A->B2 má jasné pokračovanie na **C3**, lebo ak by sme sa na **C3** dostali až neskôr z políčka **D2**, tak by sme už nemali kam pokračovať . Z **C3** vieme prejsť na len na **D2**. Znova nastáva výber, na ktorú cestu sa vydáme. Máme dve možnosti **E2** a **C2**.
Z **A->B2->C3->D2->E2** sa musíme presunúť na **F1**, inak by sme si zablokovali prechod cez toto políčko (podobne ako v prípade s **C3**). Z **F1** vedie jediná cesta na **E1**, odtiaľ na **D1** (lebo východ **V** musíme navštíviť ako posledný), ďalej **C2** (inak by sme sa neskôr v **C2** zasekli), **B1**, **C1** až nakoniec sme na **V** a vychádzame.
Dostali sme cestu **A->B2->C3->D2->E2->F1->E1->D1->C2->B1->C1->V**.
Posledný výber sme mali na políčku **D2**, pokračujme teraz na **C2**. Cesta **A->B2->C3->D2->C2** môže ďalej pokračovať len na **B1** (inak sa na tomto políčku časom zasekneme), **C1**, **D1** (východ navštívime až nakoniec), **E2**, **F1**, **E1** až **V**.
Teda vznikla cesta: **A->B2->C3->D2->C2->B1->C1->D1->E2->F1->E1->V**.
Cesta A->B1 má dve možnosti pokračovania na **C1** alebo na **C2**. Poďme sa pozrieť na možnosť **A->B1->C1**. Máme jasné pokračovanie na **D1** (východ navštívime až na koniec), **C2** (ak by sme išli na **E1**, tak buď pôjdeme ihneď na **V**, čo je ale priskoro, alebo sa tam už nikdy nedostaneme), ďalej **B2**, lebo inak by sme tam neskôr uviazli, a potom môžeme ísť len jednou cestou cez **C3**, **D2**, **E2**, **F1**, **E1** a **V**.
Dostávame cestu**: A->B1->C1->D1->C2->B2->C3->D2->E2->F2->E1->V**.
Teraz si vyberieme možnosť **A->B1->C2**. Musíme prejsť na **B2**, **C3**, **D2**, **E2**, **F1** (aby sme sa na tomto políčku neskôr nezasekli), **E1**, **D1**, **C1** a nakoniec **V**.
Dostávame teda cestu **A->B1->C2->B2->C3->D2->E2->F1->E1->D1->C1->V**.

Takto sme prešli jednotlivé cesty, ktoré spĺňajú podmienky a nad zvyšnými pohybmi na plániku sme sa zamýšľať nemuseli.

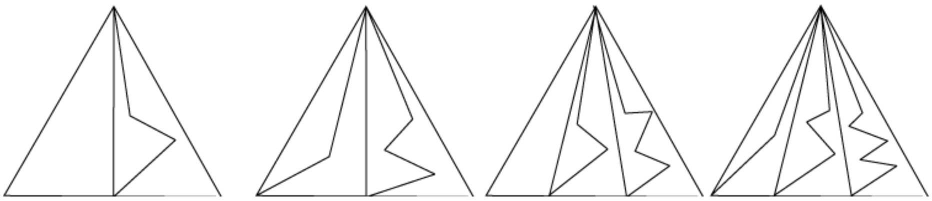
V	B1	A
D1	C1	B2
E1	D2	C2
F	E2	D3

Pozrime sa teraz na druhý plánik. Po chvíľke skúšania prídeme na to, že nám nevychádza žiadna možnosť. Naozaj to tak je? Skúsme sa o tom presvedčiť.

Ak by sme chceli prejsť plánik „hadíkom" od **A** dole na **D3**, a potom cez **E2** hore až po **B1**, tak sa zasekneme. Museli by sme ísť rovno na políčko východ, no ešte sme neprešli všetky políčka.
Rozoberme všetky možnosti, kam vieme zahnúť, ak je začiatok **A->B2**. Ak by sme z **B2** išli na **C1**, tak si odrežeme cestu na **B1** (vieme sa tam dostať len z **V**, no to musíme navštíviť ako posledné). Z **B2** vieme ešte ísť na **C2**. Ak by sme z **C2** pokračovali na **D2**, tak sa neskôr zasekneme na **D3**. Z **C2** teda musíme pokračovať na **D3** a z tade na **E2**. Takže začiatok našej cesty musí vyzerať nasledovne: **A->B2->C2->D3->E2** . Ak by sme pokračovali na **D2**, tak si odrežeme cestu ku **F**. Teda môžeme ísť len na **F**. Teraz cesta vyzerá takto: **A->B2->C2->D3->E2->F**. Z **F** vieme ísť len na **E1**. Ak by sme sa ďalej pohli na **D1**, tak si zablokujeme prístup ku **D2**. Teda pokračujeme na **D2**, odtiaľ na **C1**. Tu sa však zasekneme lebo nevieme prejsť D1 aj B1 skôr než prídeme ku východu.
Ďalšia možnosť ako ísť je **A->B1**, potom samozrejme **C1, B2, C2**, **D3** a **E2** lebo by sme sa k nim inak nedostali. Všimnime si, že na **V** teraz musíme prísť z **D1**, lebo na **B1** sme už boli. Na **D1** sa vieme dostať len z **E1** (na **C1** sme už boli). Zostávajú nám 2 políčka (**D2** a **F**), no z **E2** na **E1** nevieme prejsť tak, aby sme išli cez obe tieto políčka a žiadne iné.
Ukázali sme, že sú 4 možnosti na prejdenie prvého plánika a žiadna pre druhý plánik.

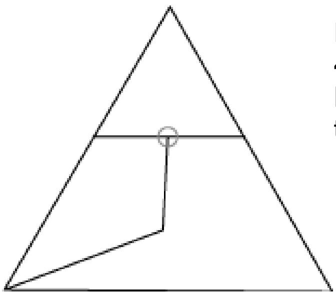
Príklad č. 3 (opravovala Ika Bachratá)

Dali sa vyrobiť všetky amulety. Je veľa možnosti ako ich spraviť. Mne sa najviac páčili tie, ktoré sú na obrázku.



Vyrábajú sa tak, že si najprv trojuholník rozdelíme na niekoľko malých trojuholníkov. Malé trojuholníky potom delíme na dva útvary, z ktorých prvý ma o jeden viac vrcholov ako druhý. Ak má mať amulet nepárny počet častí, tak jeden trojuholník necháme nerozdelený.
Napríklad 34567-amulet vyrobíme takto: Trojuholník rozdelíme na 3 malé trojuholníky. Z nich jeden rozdelíme na 4-uholník a 5-uholník, ďalší
na 6-uholník a 7-uholník a jeden trojuholník nerozdelíme. Týmto spôsobom ale vieme spraviť kľudne aj 3456789...16 amulet.

V niektorých riešeniach sa stalo, že na rovnej strane jedného útvaru ležal vrchol iného útvaru. Otázka je či sa potom tento vrchol nemá rátať za vrchol v oboch útvaroch. Niektorý ľudia vám povedia, že áno iný že nie.



Napríklad amulet na obrázku vedľa by niekto považoval za 3, 4, 5 a niekto za 4, 4, 5. Ja som uznávala obe možnosti. Dajú sa ale nájsť aj také amulety, v ktorých žiadna strana nebude mať vo vnútri vrchol (okrem strán pôvodného trojuholníka). Je to len trochu ťažšie.

Príklad č. 4 (opravovala Erika Novotná)

Vieme, že žabka má na konci skončiť na tom istom políčku, na ktorom stála na začiatku. To znamená, že ak dopredu dokopy preskočila niekoľko políčok, tak dozadu musela preskočiť rovnaký počet políčok. Teda skoky o dĺžkach 1, 22, 24, 25, 34 a 56 políčok musíme rozdeliť na dve skupiny s rovnakým súčtom – čísla z prvej skupiny bude žabka skákať dopredu a čísla z druhej skupiny bude skákať dozadu (alebo naopak). Vieme aj to, že bez ohľadu na to, či žabka skáče dopredu alebo dozadu, dokopy preskáče 1 + 22 + 24 + 25 + 34 + 56 = 162 políčok. Z tohto údaju vieme určiť, že žabka musela smerom dopredu dokopy preskočiť 162 ÷ 2 = 81 políčok a rovnaký počet políčok musela preskočiť smerom dozadu.

Rozmýšľajme teraz, ako žabka mohla preskákať smerom dopredu 81 políčok. Aby sme si čo najviac ušetrili robotu, predpokladajme, že skok o 56 políčok skákala dopredu. Potom na zostávajúce skoky smerom dopredu jej ostáva 81 – 56 = 25 políčok, ktoré vie preskočiť iba nasledovnými dvoma spôsobmi: buď ako dva skoky dĺžky 24 a 1 (24 + 1 = 25) alebo ako jeden skok dĺžky 25 (iné možnosti ako urobiť skoky dopredu s celkovou dĺžkou 25 nie sú). To vedie k dvom riešeniam.
Prvé riešenie: 1 dopredu, 22 dozadu, 24 dopredu, 25 dozadu, 34 dozadu a 56 dopredu.
Druhé riešenie: 1 dozadu, 22 dozadu, 24 dozadu, 25 dopredu, 34 dozadu a 56 dopredu.

Predchádzajúci postup sme založili na tom, že skok dĺžky 56 skáče žabka dopredu. Aby sme našli všetky riešenia, musíme ešte uvažovať prípad, že tento skok skočila dozadu. Vtedy však zvyšné skoky dozadu musia dať dokopy opäť súčet 25 – máme tie isté možnosti ako v predchádzajúcom prípade, iba "opačným" smerom:
Tretie riešenie: 1 dozadu, 22 dopredu, 24 dozadu, 25 dopredu, 34 dopredu a 56 dozadu.
Štvrté riešenie: 1 dopredu, 22 dopredu, 24 dopredu, 25 dozadu, 34 dopredu a 56 dozadu.

Keďže žabka o 56 políčok nevie skákať iným smerom ako dopredu alebo dozadu, našli sme všetky štyri riešenia úlohy.

Príklad č. 5 (opravoval Adam Kňaze)

Vedeli sme že Soren má viac ako 122 ale menej ako 140 kociek. Aleka z každej Sorenovej veže zobrala jednu kocku a z nich postavila novú vežu. Keďže jej zoznam bol rovnaký ako Sorenov, a jednu novú vežu vytvorila, musela jedna veža zaniknúť. Zaniknúť mohla veža ak sa skladala len z jednej kocky a Aleka túto kocku vzala. Ak však Soren mal vežu z jednej kocky, musí mať aj Aleka vežu z jednej kocky. Keďže každú Sorenovu vežu znížila o jedna, musel mať Soren vežu výšky 2, z ktorej sa takto stala veža výšky 1. To isté platí aj pre vežu výšky 2 – Soren musel mať vežu výšky 3 aby Aleka mala vežu výšky 2. Najmenšia Sorenova veža mala teda výšku 1, a každá ďalšia veža bola o 1 kocku vyššia ako tá predchádzajúca. Teraz možme skúsiť počítať: 1+2+3+4+............+13+14+15 = 120 – to je málo. 120+16 = 136 – toto vyhovuje zadaniu. No a môžeme ešte skúsiť čo ak bolo veží 17 – 136+17 = 154 – to je príliš veľa. Soren mal teda 16 veží ktoré postavil zo 136 kociek.

Príklad č. 6 (*opravovala Betka Bohiníková*)

Väčšina z vás tento príklad riešila pomocou skúšania rôznych možností. Je to celkom dobrý postup, ak tých možností nie je príliš veľa. Skúsime si preto trošku skresať naše možnosti pomocou podmienok zo zadania.

Ako prvé môžeme povedať, že náš kód určite nebude menej ako 3 ciferný. Pri jedno- a dvojcifernom kóde totiž nevieme rozdeliť cifry do dvoch skupín s rovnakým súčtom.
Taktiež nebude väčší ako 5 ciferný, pretože ak má byť rozdiel medzi najväčším a najmenším číslom štyri, tak môžeme mať maximálne 5 cifier.

Pozrime sa teraz na podmienku, že súčet cifier má byť šesťnásobok počtu cifier. Pri trojciferných kódoch je potom rovný 18. Chceme rozdeliť cifry na dve skupiny s rovnakým súčtom, tento súčet musí byť rovný 9. A keďže máme len 3 cifry, v jednej skupine bude len jedna cifra a tá musí byť 9 a v druhej potrebujem dve cifry so súčtom 9, pričom najmenšiu možnú cifru vieme použiť 5, aby sa zachovala podmienka, že rozdiel najväčšieho a najmenšieho je 4. To sa nám však nepodarí, lebo súčet dvoch čísel, ktoré sú aspoň 5, nemôže byť 9. Náš kód nie je trojciferný.

Súčet cifier pri štvorciferných je $6 \cdot 4 = 24$. V každej skupinke musí byť potom súčet 12. Vieme, že v každej skupinke sú 2 cifry, keďže jedna cifra nám nedá hodnotu 12. Ako vieme dostať súčet 12 pomocou dvoch rôznych cifier? Tu sú možnosti : $9 + 3$, $8 + 4$, $7 + 5$. Dvojicu 9 a 3 rovno vylúčime, keďže nespĺňajú podmienku o rozdiele najmenšej a najväčšej cifry. Dostávame takto kód 4578, ktorý spĺňa všetky podmienky.
Zostali nám ešte päť ciferné čísla. Tu bude súčet cifier 30. V jednej skupine potrebuje dve cifry so súčtom 15 a v druhej tri cifry so súčtom 15. To funguje jedine pre $8 + 7$ a $4 + 5 + 6$, avšak pre túto možnosť nesedí podmienka, že čísel v hesle je rovnako veľa ako počet cifier ich súčinu.
Už sme prešli všetky možnosti a zostáva nám len jediné riešenie. Heslo do jaskyne je 4578.