JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

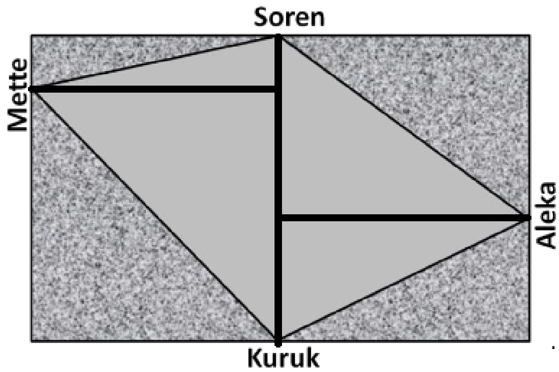
SEZAM, školský rok 2014/15, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou končí aj celá letná časť SEZAMu. Indiáni Aleka, Mette, Soren a Kuruk vám z ďalekého západu všetkým ďakujú za celoročnú pomoc pri riešení ich problémov a prajú pekné a pohodové leto. Tých najšikovnejších z vás navyše čaká letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 10. až 19. augusta vo Fačkovskom sedle. Pred tým, než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

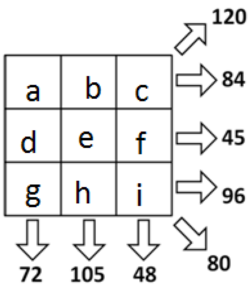
Príklad č. 1 (opravovala Ivka Hrivová)

Úlohou je zistiť, ktorá časť poľa je väčšia. Teda v reči geometrie zistiť, ktorá časť má väčší obsah. Správnou odpoveďou je, že obsahy sa rovnajú.



Dá sa na to prísť nasledovne÷
Štvoruholník vieme rozdeliť na 4 časti pomocou Sorena, Kuruka, Mette a Aleky (ako na obrázku).
Takto sme si obdĺžnikové pole rozdelili na 4 menšie obdĺžniky. Tie majú takú vlastnosť, že vo všetkých 4 je rovnaké zastúpenie paprikovej aj fazuľovej časti (uhlopriečka delí obdĺžnik na dva zhodné trojuholníky).
A teda sa obsahy oboch častí rovnajú.

Príklad č. 2 (opravovala Denisa Múthová)



Indiáni majú postavené pre svoje kone 9 ohrád v tvare štvorcov, ktoré sú na obrázku označené **a** až **i**. Štvorce tvoria jeden veľký štvorec. V každom štvorci chovajú iný počet koní, od čísla 1 až po 9, každé práve raz. Našou úlohou bude zistiť, v ktorom štvorci chovajú koľko koní. Máme zadané informácie o jednotlivých súčinoch na riadkoch, stĺpcoch a uhlopriečkach. Najskôr si jednotlivé súčiny, rozložíme na prvočísla, tj. na čísla, ktoré sú deliteľné len jednotkou a sami sebou.
Súčin 120 = 5 • 3 • 2 • 2 • 2 • 1, súčin 84 = 7 • 3 • 2 • 2 • 1, súčin 45 = 5 • 3 • 3 • 1, súčin 96 = 3 • 2 • 2 • 2 • 2 • 2 • 1, súčin 80 = 5 • 2 • 2 • 2 • 2 • 1, súčin 48 = 3 • 2 • 2 • 2 • 2 • 1, súčin 105 = 7 • 5 • 3 • 1 a nakoniec súčin 72 = 3 • 3 • 2 • 2 • 2 • 1.
V našom prípade hľadáme trojciferné súčiny, a platí, že ani jedno číslo sa neopakuje viac ako raz, tj.
Súčin 120 = 5 • 3 • 8 alebo 5 •6 •4, súčin 84 = 7 • 3 •4 alebo 7 • 2 • 6, súčin 45 = ~~5 • 3 • 3~~ alebo 5 • 9 • 1, súčin 96 = 3 • 8 •4 alebo 6 • 2 • 8 a ~~6 • 4 • 4~~, súčin 80 = ~~5 • 4 • 4~~, 5 • 2 • 8, súčin 48 = ~~3 • 4 • 4~~, 3 • 8 • 2, 6 • 4 • 2, 6 • 8 • 1, súčin 105 = 7 • 5 • 3 a súčin 72 = ~~3 • 3 • 8~~, 9 • 4 • 2, 9 • 8 • 1, ~~6 • 6 • 2~~,
6 • 3 • 4.
Odtiaľto vidíme, že práve jeden možný súčin majú súčiny 45, 80, 105. Všetky tri a aj súčin 120 majú spoločný deliteľ **5**. Súčiny sa stretávajú v písmenku **e.** Ďalej vidíme, že deliteľa 7 majú len súčiny 84 a 105, ktoré sa stretávajú v písmenku **b.** Deliteľa **9**, majú len súčiny 45 a 72, ktoré majú stred v **d**.
Písmenko f je už ľahké dopočítať, **f** = 45 ÷ (9 • 5) = **1.** V súčine 48 sme našli jedno číslo 1, tj. zvyšné sú 6 a 8 na miestach c a i. Ak na mieste i je 6, potom v diagonálnom súčte 80 máme 6 • 5 = = 30, 80 ÷ 30 nie je celé číslo, to znamená, že **i** sa nerovná 6 ale **8**. A teda **c = 6**. Zostáva nám dopočítať písmenká **a**, **g** a **h**.
Písmenko **a** = 84 ÷ (7 • 6) = **2.** Písmenko **g** = 72 ÷ (9 • 2) = **4**.
A nakoniec písmenko **h** = 96 ÷ (8 • 4) = **3.**
A sme na konci, našli sme jediné možné riešenie podľa zadania.
Výsledná ohrada má tvar:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Príklad č. 3 (opravovala Kayči Čárska)

Pri riešení tejto úlohy sa oplatilo trpezlivo hádzať kockou. Ak ste tak neurobili, pred odhalením riešenia máte poslednú šancu. Na našom papieri sa po hádzaní kockou objavili tieto čísla:
1,1,5,4,1,3,1,2,1,2,6,2,1,1,12,1,3,2,1,1,1,1,3,1,2,1,1,1,3,2,1,1,1,1,2,1,1,2,2,2,13,1,4,8,6,3,2,1,1,1,3,1,3,1,4,6,
3,1,4,1,1,1,1,5,2,2,1,2,4,1,5,1,1,1,1,1,2,3.

Pozor, to nie sú čísla hodené kockou! Každé číslo zastupuje jeden pokus, teda napr. 5 znamená, že pri tomto pokuse mi párne číslo padlo až pri piatom hode. V tejto našej postupnosti je najviac jednotiek.
Aké číslo sa na šamanovom strome vyskytovalo najčastejšie s istotou povedať nevieme, keďže nevieme, aké čísla mu na kocke padali. **Vieme však, u ktorého čísla je šanca najvyššia**. Čo myslíte, ktoré to bude? Pekne sa to dá odhadnúť aj na základe našej postupnosti. **Je to 1.**
Poďme sa teraz pozrieť, prečo je tomu tak. Namiesto 1024 hodov jednou kockou, hodíme naraz 1024 kockami. (Prečo 1024 ? Lebo toto číslo je opakovane veľmi pekne deliteľné 2 :-)) Ak by išlo všetko úplne ideálne, na polovici, na 512 kockách by padlo nepárne číslo, na 512 párne. Týchto 512 kociek s párnym číslom odložíme bokom a opäť hádžeme, no tento krát už len s 512 kockami. Pri druhom hode by v ideálnom prípade padlo párne číslo na 256 kockách, nepárne na 256 kockách. T.j. pri druhom hode odložíme bokom 256 kociek. Takto môžeme pokračovať ďalej a ďalej.... počet kociek, na ktorých padne párne číslo sa postupne znižuje. Rovnako i šanca, že padne párne číslo sa postupne znižuje.
V realite tieto čísla nebudú úplne sedieť, no aspoň + - by sa mali pohybovať v ich okolí. Čím viac pokusov spravíte, tým presnejšie výsledky by ste mali dostať.

Príklad č. 4 (opravovala Ajka Bachratá)

Našou úlohou je nájsť všetky štvorciferné čísla, ktorých ciferný súčin je 60. Najskôr nájdeme všetky štvorice cifier také, že ich súčin je 60. Po krátkom skúšaní (vyskúšajte si to) zistíme, že vyhovujú tri možné štvorice cifier, a to:

5,4,3,1, lebo $5\bullet4\bullet3\bullet1=60$, 6,5,2,1, lebo $6\bullet5\bullet2\bullet1=60$ a nakoniec 5,3,2,2, lebo $5\bullet3\bullet2\bullet2=60$

Existujú aj iné štvorice čísiel, ktorých súčin je 60, no pri nich je vždy aspoň jedno z čísiel dvojciferné, a teda nie cifra (napríklad $10\bullet3\bullet2\bullet1=60$). Teraz pre jednotlivé štvorice cifier zistíme koľko rôznych štvorciferných čisiel z nich pozostáva.

Začnime so štvoricou 5,4,3,1. Všimnime si, že všetky tieto cifry sú rôzne. Koľko existuje štvorciferných čisiel zložených z týchto cifier? Na prvom mieste (mieste tisícok) môže byť ľubovoľná z týchto štyroch cifier. Nech na prvé miesto dáme ľubovoľnú cifru, tak na druhé miesto môžeme dať ľubovoľnú zo zvyšných troch cifier. Po umiestnení cifry na druhé miesto, nám ostanú ešte dve cifry a teda dve možnosti ako umiestniť cifru na tretiu pozíciu a nakoniec na štvrtú pozíciu dáme poslednú cifru.
Ak dáme na prvé miesto napríklad 4, tak potom na druhé miesto môžeme dať jednu z cifier 5, 3 a 1, na tretie miesto podľa výberu druhej cifry postupne 3 alebo 1 (pre 5 na druhom mieste), 5 alebo 1 (pre 3 na druhom mieste) a 3 alebo 5 (pre 1 na druhom mieste). Na štvrté miesto dáme zvyšnú cifru. Dostávame tak presne $3\bullet2\bullet1=6$ možností pre 4 na prvom mieste:
4531   4351   4135
4513   4315   5153
Podobne dostaneme šesť možností aj keď dáme na prvé miesto cifru 1, 3 alebo 5. Dokopy tak pre túto štvoricu máme $4\bullet3\bullet2\bullet1=24$ možností.

Skúste si premyslieť, že pre štvoricu 6,5,2,1 vieme použiť predošlé úvahy, a opäť dostaneme 24 možností (je dôležité, že aj v tomto prípade sú všetky cifry rôzne).

Nakoniec nám ostáva štvorica 5,3,2,2, kde už nie sú všetky cifry rôzne. Na prvom mieste môže byť jedna z cifier 5, 3 alebo 2. Ak tam bude cifra 2, tak na zvyšných troch miesto sú tri rôzne cifry a podobne ako v predošlých prípadoch tak dostaneme 6 možných štvorciferných cifier s prvou cifrou 2. Ak bude prvá cifra 3, tak na zvyšných troch miestach sú cifry 2, 2 a 5, čo nám dá presne tri možnosti: 3225, 3252, 3522. Obdobne dostaneme tri možnosti aj pre prvú cifru 5: 5223, 5232, 5322. Na prvom mieste už nemôže byť iná cifra, a tak sme zistili, že pre túto štvoricu máme 12 možných čísiel.

Dokopy teda máme 24 + 24 + 12 = 60 štvorciferných čísiel s ciferným súčinom 60.

Príklad č. 5 (opravoval Hago Hagara)

Všetky totemy sú od pokladu rovnako ďaleko, čo znamená, že všetky totemy musia stáť na pomyselnej kružnici so stredom v poklade. Treba však zistiť, ako môžu byť na tejto kružnici rozmiestnené.

Vzdialenosť medzi totemom a jeho bratom (najbližším susedom na kružnici) je rovnaká ako vzdialenosť medzi totemom a pokladom, čiže pre všetky totemy rovnaká. Navyše má totem dvoch bratov, takže má brata na oboch stranách. Z toho môžeme usúdiť, že totemy sú rozmiestnené **rovnomerne** po celej kružnici. Spolu teda vytvárajú pravidelný útvar, v ktorého strede je poklad. Už len zistiť, koľko má tento útvar vrcholov.

Predstavme si, že niekto natiahol medzi pokladom a jednotlivými totemami laná. Keďže sú totemy rozmiestnené rovnomerne, tak uhly medzi susednými lanami budú rovnaké. Pozrime sa teraz na totem, jedného z jeho bratov a poklad. Všetky tri vzdialenosti vrámci tejto trojice sú rovnaké, čiže tvoria rovnostranný trojuholník a ten má všetky vnútorné uhly veľkosti 60°. Jeden z týchto uhlov je vlastne uhol medzi susednými lanami, takže medzi lanami sú uhly veľkosti 60°. Do kruhu sa takto zmestí presne šesť lán a na ich koncoch bude šesť totemov.

Na ostrove je šesť totemov rozmiestnených do pravidelného šesťuholníka a poklad leží v strede tohto šesťuholníka.

Príklad č. 6 (*opravoval Feri Dráček*)

Zo zadania vieme

$$am + as = 80$$

čo môžeme napísať ako: $a \bullet (m+s) = 80$. Rozklad 80 na prvočísla je $80 = 2^5 \bullet 5$. Ďalej vieme

$$am + ms = 425,$$

teda: $m \bullet (a+s) = 425 = 5^2 \bullet 17$.

Ak odčítame od sebe predchádzajúce dve rovnice dostaneme:

$$ms - as = 345,$$

$$s \bullet (m-a) = 345 = 5 \bullet 3 \bullet 23,$$

čiže **a** sa bude rovnať 5 alebo 2, **m** sa bude rovnať 5 alebo 17 a **r** sa bude rovnať 3, 5 alebo 23.

Z prvej rovnice $a \bullet (m+s)=80$ dostaneme, že ak **a** sa bude rovnať 5, tak $(m+s) = 16$. Táto možnosť ale nemá riešenie, lebo z hodnôt, ktoré môžeme priradiť **m** a **s** nedokážeme vyskladať súčet 16. Preto **a**=2 . Potom z druhej rovnice ak **m**=5 tak (a+s) sa musí rovnať 85, čo tiež nemá riešenie.

Takže nutne **m**=17, z čoho po dosadení do tretej rovnice dostávame **s**=23, čo vyhovuje.

Jediné vyhovujúce riešenie je a=2, m=17 a s=23 a súčet a + m + s = 42.