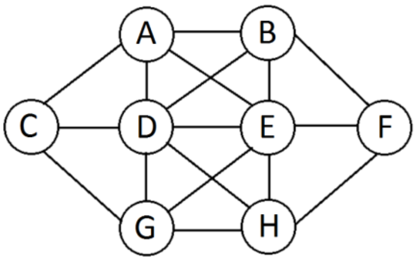
JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2015/16, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
do rúk sa k vám práve dostali zadania tretej, a teda poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Naika, Rudolfus, Ebonika a Horus sa veľmi potešili všetkým vaším riešeniam. Zároveň na vás čaká posledná sada úloh, s ktorými potrebujú pomôcť. Využite poslednú možnosť zabojovať o čo najlepšie umiestnenie vo finálnom poradí. Tí vytrvalí a úspešní sa môžu tešiť na letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 15 až 24. augusta 2016 na Fačkovskom sedle. Pred tým než sa pustíte do riešenia úloh, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, určite vám to pomôže.
Nakoniec vás ešte chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Maťka Kudelčíková)



Pre prehľadnosť si jednotlivé stajne označme písmenami, tak ako na obrázku. Potrebujeme do obrázka dosadiť čísla od 1 po 8. Väčšina z vás si ihneď všimla, že zo stajní D a E ide najviac chodníčkov, konkrétne šesť. Obe stajne majú v celom obrázku teda len jednu stajňu s ktorou nesusedia. Čísla od 2 po 7 však každé majú až dve iné čísla s ktorými nemôžu susediť (o jedna menšie a o jedna väčšie), preto ich do stajní D a E dať nemôžeme. Použiteľné sú iba čísla 1 a 8, majú totiž iba jedno číslo, s ktorým nemôžu susediť.
Dajme teda osem tiav do stajne D a jednu ťavu do stajne E (mohli by sme aj naopak). Osem tiav nesmie susediť so siedmimi ťavami, a jediná stajňa ktorá nesusedí so stajňou D, je stajňa F. Sedem tiav preto musí byť v stajni F. Rovnako teraz musíme umiestniť aj dve ťavy do stajne C.
Zostali nám tri, štyri, päť a šesť tiav, a stajne A, B, G a H. Čo ešte vieme? Keďže máme dve ťavy v stajni C, tri ťavy nemôžu byť v stajniach A a G, a musia byť preto v stajni B alebo H. Rovnako, v stajni F je sedem tiav, šesť tiav bude preto buď v stajni A alebo G. A ešte vieme že štyri a päť tiav nemôže byť vedľa seba.
A to je všetko, ak dáme tri ťavy do stajne B, musíme dať šesť tiav do stajne G, inak by boli štyri a päť tiav vedľa seba. Aby štyri ťavy neboli s tromi, musia byť v stajni H, a päť tiav v stajni A.
Podľa zadania však máme nájsť všetky riešenia, čo by sme teda na postupe mohli zmeniť? Jediné dve miesta kde sme sa mohli rozhodnúť čo kam dáme bolo kde bude osem a jedna ťava, a potom tri a šesť tiav, oba razy sme mali dve možnosti. Tieto stajne teda môžeme meniť a všetky ostatné stajne vypĺňať podľa nich. Ak teda dáme osem tiav do stajne D a jednu do stajne E, tri ťavy do stajne B a šesť do G, dostaneme jednu možnosť. Ak znova dáme osem tiav do D a jednu do E, ale teraz pre zmenu tri ťavy do G a šesť do B, vznikne druhá možnosť. Teraz môžeme vymeniť osem a jednu ťavu, osem do E a jednu do D. Tri potom dáme do B a šesť do G čím vznikne tretia možnosť, a posledná možnosť je osem do E a jedna do D, tri do G a šesť do B.
Máme všetky možnosti, rozhodovali sme sa totiž na dvoch miestach a vytvorili sme všetky možné kombinácie, ktoré sú štyri.

Príklad č. 2 (opravovala Ajka Bachratá)

Našou úlohou je zistiť, aké číslice môžu byť zamaskované značkami Ⲭ a ↄ v tajnom kóde Ⲭ672ↄ. Vieme, že kód je deliteľný číslom 72, je päťciferný a značky Ⲭ a ↄ môžu byť aj rovnaké cifry.
Zabudnime na chvíľu, že kód je deliteľný 72 a pozrime sa ako môže vyzerať. Značka Ⲭ je prvá cifra päťciferného kódu, takže nemôže byť rovná nule. Inak by bol kód len štvorciferné číslo.

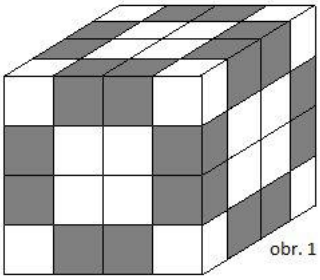
Okrem nuly môže byť značka ⵅ hociktorá cifra od 1 do 9. Na poslednú značku ঌ nemáme vôbec žiadne obmedzenie, takže môže byť hociktorá cifra od 0 do 9. Teraz si vieme vypísať všetkých možných kandidátov na kód, postupným dosádzaním za obe značky: Najskôr dáme ⵅ = **1** a k nej postupne ঌ = **0**, ঌ = **1**, ঌ = **2**, ..., ঌ = **9**. Tak dostaneme možné kódy **1**672**0**, **1**672**1**, **1**672**2**, ..., **1**672**9**. Potom ⵅ = **2** a k nej postupne ঌ = **0**, ঌ = **1**, ঌ = **2**, ..., ঌ = **9**. Tak dostaneme možné kódy **2**672**0**, **2**672**1**, **2**672**2**, ..., **2**672**9**. A tak ďalej až po ⵅ = **9** a k nej postupne ঌ = **0**, ঌ = **1**, ঌ = **2**, ..., ঌ = **9** a možné kódy **9**672**0**, **9**672**1**, **9**672**2**, ..., **9**672**9**.
Takto sme dostali pomerne veľa (môžete si spočítať koľko) kandidátov na kód. Teraz už stačí iba overiť, ktorí z nich sú deliteľní 72. Tu sa dá postupovať rôzne - najpracnejšia možnosť je vydeliť každého jedného kandidáta 72 a pozrieť sa čo dostaneme. Síce môžeme deliť na kalkulačke, ale aj tak to bude trvať dosť dlho. Navyše treba dávať veľký pozor, aby sme sa nepomýlili, alebo nejaký kód nezabudli vyskúšať. Potom by sme mohli nenájsť nejaké riešenie a ani by sme o tom nevedeli.
Druhá možnosť je vymyslieť nejaké finty, aby sme nemuseli skúšať všetkých kandidátov na kód, ale len niektorých. Najľahšia takáto finta je všimnúť si, že číslo 72 je párne. Inak povedané, že číslo 72 je násobok čísla 2. Takže aj čísla deliteľné 72 (teda násobky čísla 72) budú párne, resp. násobky čísla 2. Napríklad 72, 144, 216, 288, 360, ... Tým pádom spomedzi kandidátov na kód môžeme vyškrtnúť všetkých nepárnych, teda tých kde ঌ = 1, ঌ = 3, ঌ = 5,ঌ = 7 a ঌ = 9. Takže nám už stačí vyskúšať iba polovicu kandidátov.
Takto sa dajú nájsť aj ďalšie finty, či už vďaka tomu, že 72 je násobkom aj ďalších čísel okrem dvojky, alebo sledovaním ako sa nám mení zvyšok po delení, keď postupne zväčšujeme kód. Pozrite si svoje riešenie, či si aj ty použil nejakú fintu.
Takto sa nám podarí nájsť dva kódy 36720 a 46728. Platí, že sú deliteľné 72 (36720 ÷ 72 = 510, 46728 ÷ 72 = 649) a žiaden iný kandidát na kód už 72 deliteľný nie je.

Príklad č. 3 (opravovala Denisa Múthová)
Horus s Ebonikou stretli opäť prívetivých Anorégov a hádavých Nieduínov, a to dve púštne krásavice Šehere a Zádu. Ako už vieme, obe vyzerajú na chlp rovnako, rozlišujú sa iba formou akou komunikujú. Pýtajú sa iba otázky, Anorégovia také, na ktoré je správna odpoveď áno, Nieduíni so správnou odpoveďou nie. Záda sa ich pri stretnutí opýtala: „ Je aspoň jedna z nás Nieduínka?" Poďme zistiť, ktorá krásavica patrí ku ktorému klanu.
Vieme, že na Zádinu otázku môžu odpovedať len áno alebo nie, iná možnosť nie je. Opäť je tu viacero spôsobov ako úlohu riešiť, preberme si dva varianty. Ak Horus a Ebonika povedali „**nie**", Záda by mala byť podľa definície Nieduín. Ak si teda odpovieme na jej otázku nie, znamená to, že ani jedna z krásavíc nie je Nieduínka, tj. obe sú Anoréganky. Môže však byť Záda Nieduínka aj Anoréganka zároveň? Nie, takže toto riešenie nie je možné.
To znamená, že Horus a Ebonika povedali „**áno**", a **Záda je Anorég**. A ak je ona Anorég, jej otázka udáva, že **Šehere** musí byť **Nieduín** (otázka: aspoň jedna z nás je Nieduín). Našli sme teda správne riešenie. (Znova bolo dôležité vyskúšať obe možnosti, ešte sa mohlo stať, že Záda je z úplne iného kmeňa.)

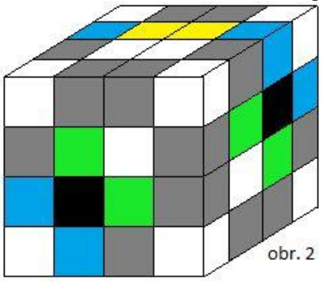
Druhé riešenie skúma všetky možnosti, z akých kmeňov mohli byť krásavice.
Za prvé, obe mohli byť Anoréganky. Vtedy odpoveď na Zádinu otázku je áno, čo však nedáva zmysel, lebo jej otázka tvrdí, že medzi nimi je aspoň jedna Nieduínka.
Za druhé, obe mohli byt Nieduínky. Odpoveď na Zádinu otázku je teda nie, to znamená, že obe sú Anoréganky. Potom však Horus a Ebonika mali odpovedať áno, čo však vedie k sporu, že Záda je členkou oboch kmeňov zároveň.
Za tretie, Záda je Nieduínka a Šehere Anoréganka. Vtedy Horus a Ebonika odpovedia Záde nie, a teda podľa jej otázky sú ony opäť obe Anoréganky, čo však nesedí s počiatočnou hypotézou.
Za štvrté (ak nevýjde, obe sú cudzinky), **Záda je Anoreg a Šehere Nieduín**. Vtedy Horus a Ebenike odpovedia na otázku áno, a tým pádom aby sedela aj otázka, Šehere musí byť Nieduín.

Odhalili sme teda oboma variantmi, že ***Záda patrí do kmeňa Anorégov a Šehere do kmeňa Nieduínov a správna a aj slušná odpoveď na Zádinu otázku je áno.***
S ktorou sa bude lepšie baviť o pyramidách? Radšej si vyberú **tú prívetivú, teda Zádu**. Môže sa ich napríklad opýtať: „Je Chufova pyramida najväčšia?" Ich odpoveď bude áno, budú vedieť, že je najväčšia. Ak sa to opýta Šehere, tak len zistia že Chufova pyramida nie je najväščšia, ale nezistia ktorá je. Ale všetko závisí samozrejme od dobre položenej otázky a prívetivosti krásavíc.

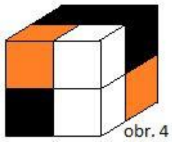
Príklad č. 4 (opravovali Miška a Aďa Santrové)


obr. 1

Skúsme sa pozrieť ako by kocka vyzerala, keby do nej Rudolfus nevyvŕtal tunely. Bolo by na nej presne 24 malých kociek, ktoré by mali práve dve steny sivé (obr. 1). Čo však vyvŕtanie tunelov zmení na ofarbení? Vyvŕtaním tunelov sa každej kocke, ktorá susedí s tunelom, ofarbí ešte jedna stena naviac.
Všimnime si najprv začiatky a konce tunelov (na obr. 2 vidíme kocku spredu, na obr. 3 je kocka zozadu, akoby sme ju otočili o 180°). Osem kociek, ktoré mali dve steny sivé už budú mať zafarbené tri steny, na obrázkoch sú to modré kocky. Vidíme však aj kocky, ktoré mali len jednu stenu sivú, no ofarbila sa aj druhá stena. Sú to zelené kocky a je ich 6. Mnohí ste písali, že týchto kociek je osem, to však nie je úplne pravda. Na obr. 3 vidíme dve kocky (červené), ktoré ste taktiež často započítali, no tieto kocky majú až tri steny sivé – na povrchu veľkej kocky, na začiatku jedného z tunelov a v strede druhého z tunelov, teda tieto kocky počítať nemôžeme.


obr. 2

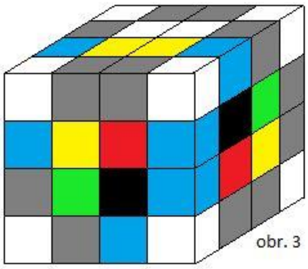
Teraz sa pozrime na kocky na povrchu, ktoré nie sú ani na hrane, ani nesusedia s tunelom. Tieto kocky mali jednu sivú stenu, avšak niektorým pribudla druhá v strede tunela (čiže dve sivé steny budú na malej kocke oproti sebe). Takýchto kociek sme našli až 6: na zvislých stenách kocky 2, a na hornej a dolnej podstave ešte 4, sú to žlté kocky (dolnú podstavu nevidíme, no tieto dve kocky sú rovnako umiestnené pod tunelom ako na hornej podstave).
Ostávajú nám už iba kocky vnútri veľkej kocky. Vyzerá to presne ako na obr. 4.


obr. 4

Kocky na mieste, kde sa tunely stretli, majú dve steny sivé: jednu v jednom tuneli a druhú stenu v druhom tuneli (oranžové kocky). Zvyšné dve neofarbené kocky majú iba jednu stenu sivú, čiže tieto nepočítame.
Pozreli sme sa už na všetky kocky, čiže to stačí iba spočítať:

$$24 - 8 + 6 + 2 + 4 + 2 = 30.$$

Kociek s dvomi ofarbenými sivými stenami je 30.


obr. 3

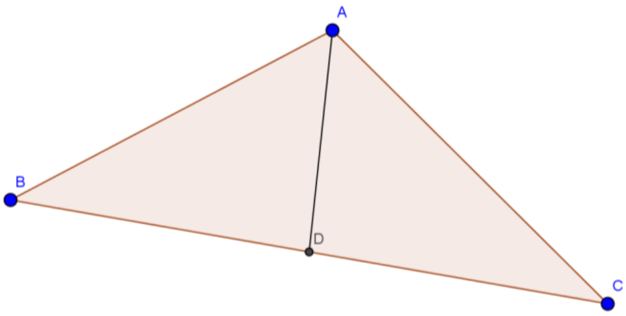
Príklad č. 5 (opravoval Anino Belan)

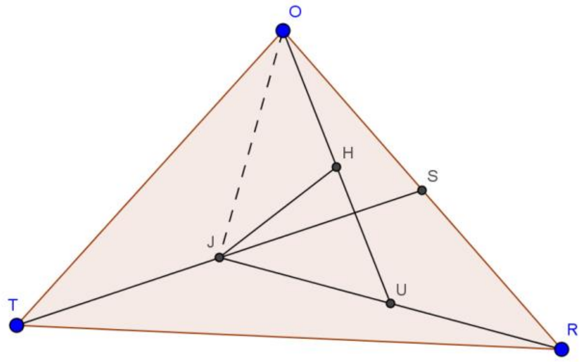
S tým zoznamom je to ošemetné. Dajme tomu, že Rudolfusovi sľúbilo ***n*** hostí, že prídu. (Predstavte si, že ***n*** je napríklad 10, ale rovnako to bude fungovať aj pre iné čísla.) Koľko hostí môže každý hosť poznať? Ak je outsider, tak nepozná nikoho. Teda najmenej môže poznať 0 hostí. Ak je naopak lev salónov, tak pozná všetkých ostatných, teda môže poznať najviac ***n-1*** hostí. (Ak je hostí desať, tak lev salónov pozná najviac deväť z nich, lebo on sám sa neráta.)
Situácia je teda taká, že máme ***n*** ľudí a každý z nich pozná nejaký počet iných, pričom tieto počty sú od 0 do ***n-1***. Rôznych počtov je ***n***. (Aj je hostí desať, tak možný počet známych pre každého z nich je 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 alebo 9, čo je dokopy desať rôznych čísel.) A ak má mať každý z hostí iný počet známych, musia byť tieto počty použité všetky. (Keby napríklad v prípade desiatich hostí nikto nepoznal troch, tak by sme mali iba deväť možností: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. A keby sme tieto čísla priradili desiatim hosťom, aspoň jedno by sa muselo zopakovať.)
To je ale problém. Pretože ak musíme použiť všetky počty známych, musíme použiť naraz aj 0 aj ***n-1***. Medzi hosťami musí byť naraz aj outsider, ktorý nepozná nikoho, aj lev salónov,

ktorý pozná všetkých. A to sa naraz nedá, pretože lev salónov by musel poznať aj outsidera a keďže sa dvaja ľudia vždy poznajú navzájom, outsider by nebol outsider. Takže to vyzerá tak, že Naika má pravdu.
Lenže... Existuje jeden zapeklitý prípad, kedy predošlá argumentácia nefunguje. Ona sa totiž zakladá na tom, že tam budú dvaja hostia – jeden outsider a jeden lev salónov. Ale mohlo sa stať, že aj keď Rudolfus pozval veľa Anorégov a Nieduínov, všetci až na jedného sa práve prejedli zmrzlinou, bolelo ich brucho a mamičky ich na oslavu nepustili. Ak na oslavu prišiel iba jeden hosť, tak na Rudolfusovom zozname bol jediný, mal číslo 0, lebo nebolo koho poznať a Rudolfusovo tvrdenie, že každý človek na zozname má pri sebe napísané iné číslo, je naprosto pravdivý.
Takže ak Naika vedela, že na oslavu prišli aspoň dvaja ľudia, mala naprostú pravdu a Rudolfus sa musel pomýliť. Ak to ale nevedela a na oslavu sľúbil prísť iba jeden človek, mohol mať pravdu Rudolfus.

Príklad č. 6 (opravovala Ivka Hrivová)

Chceme zistiť, aký obsah má trojuholník JUH. Vieme, že veľký trojuholník TRO zaberá $10m^2$. Počas celého príkladu sa točíme okolo pojmu ťažnica. Čo nám ťažnica spraví s obsahom trojuholníka?





Ťažnica je spojnica stredu strany s jej protiľahlým vrcholom. Keďže D je stred BC, musí platiť BD=CD. Určite budú mať trojuholníky ABD a ACD rovnakú výšku na stranu a, a teda podľa vzorca na výpočet obsahu $\frac{v_a*a}{2}$ majú ABD a ACD rovnaký obsah. To znamená, že ťažnica rozdelí trojuholník na dva trojuholníky s polovičným obsahom pôvodného (s týmto faktom budeme pracovať počas celého riešenia ☺).
Rozoberme si po častiach cestičky (trojuholníky) zo zadania: $S_{\Delta TRO} = 10$, TS je ťažnica trojuholníka TRO, teda $S_{\Delta TSR} = S_{\Delta TSO} = \frac{10}{2} = 5$. RJ je ťažnica trojuholníka TRS, teda $S_{\Delta RTJ} = S_{\Delta RSJ} = \frac{5}{2} = 2{,}5$. OJ je ťažnica trojuholníka OTS, teda $S_{\Delta OTJ} = S_{\Delta OSJ} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ a $S_{\Delta RSJ} + S_{\Delta OSJ} = S_{\Delta ORJ} = 2{,}5 + 2{,}5 = 5$. OU je ťažnica trojuholníka ORJ, teda $S_{\Delta OUJ} = S_{\Delta OUR} = \frac{5}{2} = 2{,}5$. A nakoniec sa pozrime na trojuholník OUJ. V ňom je ťažnicou úsečka JH a z toho dostávame: $S_{\Delta JUH} = S_{\Delta JOH} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$

Takže vidíme, že mravenisko v trojuholníku JUH zaberá 1,25m².