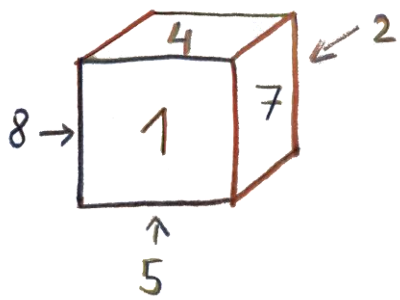
JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU
SEZAM, školský rok 2015/16, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMU. Naika, Rudolfus, Ebonika a Horus sa s vami do jari lúčia. Najšikovnejších z vás čaká zimné sústredenie v Švp Šípková v Terchovej, ktoré sa bude konať v termíne od 17. do 20. marca. Skôr než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Iva Jančigová*)

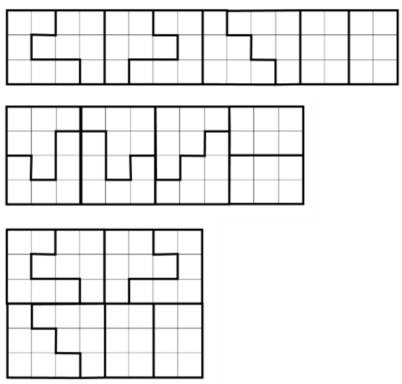


Začnime na steny kocky umiestňovať mandle tak, aby sme ich použili čo najmenší počet. Je jedno, ktorou stenou začneme. Na prednú stenu teda dáme 1 mandľu. Na žiadnej zo susedných stien nemôžu byť 2 mandle, ale na zadnej stene môžu. Tak ich tam dáme. 3 mandle nemôžeme dať na žiadnu zo zvyšných štyroch stien, lebo by susedili so zadnou stenou a nebol by rozdiel aspoň 2 mandle. Ale 4 mandle už môžu byť. Dajme ich teda na hornú stenu. 5 mandlí tým pádom nemôže byť ani vľavo, ani vpravo, ale môže byť dolu. (Nič by sa nestalo, keby sme 4 a 5 vymenili.) Ostávajú nám teda ešte ľavá a pravá stena. Na ani jednej z nich nemôže byť 6 mandlí, lebo obe susedia s dolnou stenou, ktorá má mandlí 5. Ale môžeme dať vpravo 7 a vľavo 8 (alebo naopak vpravo 8 a vľavo 7). Výsledné rozmiestnenie je nakreslené na obrázku. Spolu sme použili 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27 mandlí. Menej ich nemôže byť, lebo ak chceme dodržať pravidlo, že sa počet mandlí na susedných stenách musí líšiť aspoň o 2, tak nemôžeme použiť tri za sebou idúce počty mandlí (napr. 1, 2, 3) – premyslite si, prečo.

Poznámka 1: *Niektorí z vás zabudli zobrať do úvahy pravidlo napísané v zadaní, že na každej stene je iný počet mandlí. Bez tohto pravidla stačí dať na prednú a zadnú stenu po 1 mandli, na hornú a dolnú po 3 a na prednú a zadnú po 5. To je spolu 1 + 1 + 3 + 3 + 5 + 5 = 18 mandlí.*

Poznámka 2: *A niektorí z vás predpokladali, že na každej stene koláčika musia byť aspoň 2 mandle. Toto je v matematike také zaujímavé: keď sa povie, že vo vrecúšku je niekoľko cukríkov, môže sa stať, že v ňom je len 1 cukrík. Podobne aj s týmito mandľami: keď je každá stena ozdobená mandľami, myslí sa tým, že môže byť stena, ktorá má len 1 mandľu.*

Príklad č. 2 (*opravovala Ika Hucíková*)



Každý dielik obsahuje šesť štvorčekov. To je dôležité, lebo teraz vieme, že čokoľvek čo zložíme z ôsmych dielikov bude obsahovať 6 . 8 = 48 štvorčekov. My chceme postaviť obdĺžnik. Rôznych obdĺžnikov, ktoré obsahujú 48 štvorčekov je len 5. Majú rozmery 1x48, 2x24, 3x16, 4x12 a 6x8. Teraz ešte potrebujeme zistiť, ktoré sa naozaj dajú zložiť, ktoré nie a prečo.
Obdĺžnik s rozmermi 1x48 môže obsahovať len dieliky, ktoré majú výšku nanajvýš jedna a šírku hoc akú, alebo šírku nanajvýš jedna a výšku hoc akú. Také dieliky sú v skladačke len dva, oba tvaru obdĺžnika s rozmermi 1x6. My chceme stavať veľký obdĺžnik z ôsmych dielikov, takže dva nám stačiť nebudú.

Obdĺžnik s rozmermi 2x24 môže obsahovať len dieliky, ktoré majú výšku nanajvýš dva a šírku ľubovoľnú, alebo šírku nanajvýš dva a výšku ľubovoľnú. Také dieliky sú v skladačke len štyri. Dva tvaru obdĺžnika z rozmermi 1x6 a dva tvaru obdĺžnika z rozmermi 2x3. To už je lepšie ale stačiť nám to tiež nebude.
Ostatné obdĺžniky máme šancu poskladať. Že sa to naozaj dá najľahšie dokážeme tak, že ich poskladáme. Na obrázku sú nakreslené obdĺžniky 3x16, 4x12 a 6x8, ktoré sú poskladané z ôsmych dielikov Naikinej skladačky. Stačí ukázať jeden spôsob zloženia pre každý rozmer, lebo zisťujeme či sa to dá a nie ako sa to dá.

Príklad č. 3 **(***opravoval Peťo Novotný***)**

Aby sme nemuseli skúšať priveľa možností, všimnime si najskôr, že číslo 101 je nepárne. Na štyroch severných policiach je spolu $4 \cdot P$ zvitkov, čo je párne číslo bez ohľadu na hodnotu *P*. Počet kníh na južných policiach preto musí byť nepárny a teda aj číslo *K* je nepárne.
Skúšajme teda za *K* postupne dosadzovať nepárne dvojciferné čísla a ku každému dopočítajme príslušnú hodnotu *P*. Pre výslednú dvojicu hneď skontrolujeme, či vyhovuje zadaniu.

- Ak $K = 11$, tak kuchárskych zvitkov je $3 \cdot 11 = 33$. Potom zvitkov o pyramídach je $101 - 33 = 68$, teda $P = 68 \div 4 = 17$. Táto možnosť nevyhovuje, pretože v číslach 11 a 17 je spolu trikrát použitá cifra 1. Zo zadania však vieme, že zo štyroch cifier, z ktorých sú zložené čísla *K* a *P*, sa majú rovnať len dve.
- Ak $K = 13$, kuchárskych zvitkov je $3 \cdot 13 = 39$. Potom zvitkov o pyramídach je $101 - 39 = 62$, teda $P = 62 \div 4 = 15{,}5$, čo však nie je celé číslo.
- Ak $K = 15$, kuchárskych zvitkov je $3 \cdot 15 = 45$, zvitkov o pyramídach je $101 - 45 = 56$ a $P = 56 \div 4 = 14$. Táto možnosť vyhovuje – v číslach 14 a 15 je dvakrát použitá cifra 1.
- Ak $K = 17$, kuchárskych zvitkov je $3 \cdot 17 = 51$, zvitkov o pyramídach je $101 - 51 = 50$ a $P = 50 \div 4 = 12{,}5$, čo však nie je celé číslo.
- Ak $K = 19$, kuchárskych zvitkov je $3 \cdot 19 = 57$, zvitkov o pyramídach je $101 - 57 = 44$ a $P = 44 \div 4 = 11$. Táto možnosť nevyhovuje, pretože v číslach 19 a 11 je spolu trikrát použitá cifra 1.

Ďalej už skúšať nemusíme. Ak totiž $K \geq 21$, tak kuchárskych zvitkov je aspoň $3 \cdot 21 = 63$, zvitkov o pyramídach je nanajvýš $101 - 63 = 38$ a $P \leq 38 \div 4 = 9{,}5$. Teda pre ostatné hodnoty *K* už nevyjde *P* dvojciferné číslo.
Jediná vyhovujúca možnosť je preto K = 15 a P = 14.

Príklad č. 4 **(***opravovali Lenka Trojaková a Miro Hudec***)**

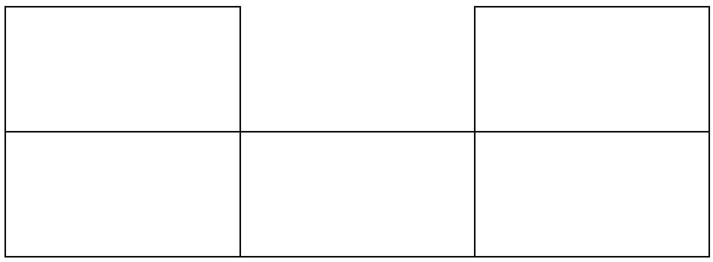
Máme 40 denárov, ktoré chceme vhodiť do automatu tak, aby sme získali čo najviac fíg. Na začiatku je na obrazovke automatu napísané číslo 1. Ak vhodíme do automatu 5 denárov, číslo na obrazovke sa vynásobí 2, ak vhodíme 2 denáre, k číslu na obrazovke sa pripočíta číslo 3. Ako vhadzovať denáre čo najvýhodnejšie?
Je ťažké porovnať výhodnosť jednotlivých vhodení denárov, keďže hádžeme rôzne počty denárov a aj prírastok sa pri vhadzovaní 5 denárov líši s každým vhodením. Čo však môžeme spraviť je porovnať situáciu po vhodení 10 denárov. Aby sme minuli celých 10 denárov, môžeme

a) Buď 5-krát vhodiť 2 denáre a získať na obrazovke číslo 16
b) alebo 2-krát vhodiť 5 denárov a získať tak na obrazovke číslo 4.

Keďže 16 > 4, volíme možnosť a). Ostalo nám 30 denárov. Ak by sme teraz prihodili 3-krát 2 denáre, získali by sme na obrazovke číslo 25 a minuli 6 denárov. Ak však vhodíme 5 denárov, získame na obrazovke číslo 32. Výhodnejšie je teda použiť „násobiace" vhadzovanie – získali sme väčšie číslo za menej fíg. V ďalšom kroku môžeme spraviť tú istú úvahu. Dostaneme číslo 64 pri „násobiacom" vhadzovaní a 41 pri 3-násobnom vhodení 2 denárov. Čím ďalej pôjdeme, tým viac sa nám bude oplatiť vhadzovať 5 denárov, lebo budeme číslom 2 násobiť čoraz väčšie číslo.
Najvýhodnejší postup vhadzovania denárov je teda nasledovný – najskôr vhodíme 5-krát 2 denáre, čím získame na obrazovke číslo 16 a potom vhodíme 6-krát 5 denárov, čím dostaneme na konci na obrazovke číslo 1024 a minuli sme tak všetky denáre.

Príklad č. 5 (*opravoval Mojo Majdiš****)***

Po niekoľkých pokusoch isto každý príde na to, že najkratšia cesta je po šiestich slamkách. Je to preto, že Rachot musí ísť aspoň dvakrát dole, aspoň raz dopredu a aspoň trikrát doprava a 2+1+3=6. A keďže má byť Rachotova cesta najkratšia, tak to musia byť práve tieto pohyby a žiadne iné.
Pozrime sa teraz na stavbu spredu. Vidíme vlastne takýto útvar.



Po tomto útvare ide Rachot dvakrát dole, trikrát doprava a raz sa nám zdá, že sa ulieva – to vtedy keď ide dopredu. Po tomto útvare sa Rachot pohne päťkrát a teda navštívi šesť vrcholov (rozmyslite si prečo), a teda má šesť možností kedy sa pohnúť dopredu – z nášho pohľadu uliať sa. Celkový počet možností teda bude šesťnásobok počtu možností ako ísť z ľavého horného rohu do pravého dolného rohu na tomto obrázku.
Akými spôsobmi môžeme zoradiť dvakrát dole (D) a trikrát vpravo (V)? Vypíšme si všetky možnosti:
DDVVV, DVDVV, DVVDV, DVVVD, VDDVV, VDVDV, VDVVD, VVDDV, VVDVD, VVVDD.
To je síce desať možností, no posledné tri musíme vyškrtnúť, pretože tými cestami sa na našom obrázku ísť nedá.
Ostáva nám teda sedem možností. Celkový počet možností ktoré má Rachot je teda šesť krát sedem čo je 42 možností.

Príklad č. 6 (*opravoval Maťo Bachratý****)***

Pre mnohých z vás bolo najťažšou časťou úlohy správne pochopenie zadania. A naozaj to bolo vcelku náročné. Začnime teda tým, že sa poriadne pozrieme na zadanie:

- Medzi žiadnymi dvoma ťavami s rovnakým počtom hrbov nemôže byť dva alebo viac iných tiav s rovnakým počtom hrbov.

Tu sú dôležité dve veci:

Za prvé, nehovorí sa nič o tom, že ťavy, ktoré sú „medzi", vadia iba ak majú iný počet hrbov ako ťavy na okraji. To znamená, že rozmiestnenie tiav 2222 (takže 4 dvojhrbé ťavy za sebou) nevyhovuje starovekej tradícii.

Za druhé, nehovorí sa nič o iných ťavách medzi krajnými. Takže ani rozmiestnenie 34252132 nevyhovuje, lebo medzi dvoma 3-hrbými ťavami sa nachádzajú dve dvojhrbé (a veľa ďalších).

- Horus sa snažil zobrať do karavány čo najviac tiav.

To znamená, že najskôr musíme zistiť, akú najdlhšiu karavánu vieme zostaviť. A potom sa pokúsime zistiť, koľko rôznych karaván s týmto maximálnym počtom tiav sa dá zostaviť.

Keď už správne rozumieme zadaniu, tak si vieme rýchlo uvedomiť, že z jedného druhu môžeme mať v jednej karaváne najviac 3 ťavy. Ak by tam boli aspoň 4 ťavy s rovnakým počtom hrbom, napríklad 1-hrbé, tak medzi dvoma krajnými 1-hrbými ťavami by boli aspoň dve ďalšie iné 1-hrbé ťavy a zástup by nevyhovoval tradícii. Nuž a aspoň jednu karavánu s $3 \cdot 5 = 15$ ťavami určite vieme zostaviť, napríklad: 111222333444555.
Podobných karaván vieme vyrobiť dokopy 120, a to tak, že si určíme ľubovoľné poradie čísel 1, 2, 3, 4 a 5 a následne ich v tomto poradí vypíšem, ale tak, že každé číslo napíšeme až 3-krát. Premyslite si, prečo je rôznych poradí presne 120.

Teraz sa pozrime na jednu konkrétnu z týchto 120 karaván, napríklad 222444111555333. Ak teraz vymeníme susediacu 2ku a 4ku, tak dostaneme zástup 224244111555333, ktorý taktiež vyhovuje. Podobnú výmenu vieme spraviť ešte na troch ďalších miestach, konkrétne medzi 4 a 1, medzi 1 a 5 a nakoniec medzi 5 a 3. Dokonca vieme spraviť aj niekoľko z týchto zmien naraz a stále dostaneme vyhovujúci zástup.
Koľko týmito výmenami vieme dostať možných zástupov? Máme 1 možnosť, keď nespravíme žiadnu zmenu. Potom máme 4 možnosti, ak spravíme práve 1 výmenu. Pre 2 výmeny máme presne 6 možností (vyskúšajte si). Pre 3 výmeny si vlastne zvolíme jedno zo štyroch rozhraní, kde výmenu nespravíme. Takže máme opäť 4 možnosti. Nakoniec 4 výmeny vieme spraviť jediným spôsobom. Spolu teda pre každú zo 120 základných karaván dostávame $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ možností. To je spolu $120 \cdot 16 = 1920$ karaván. Zamyslite sa, či bude všetkých týchto 1920 karaván rôznych (inač povedané, ak zoberieme dva rôzne základne zástupy, a pre každý spravíme niektoré vyššie spomenuté výmeny, nemôže sa potom stať, že dostaneme rovnaké zástupy).

Za takéto riešenie by ste už dostali plný počet bodov, no v skutočnosti sme ešte neskončili. Našli sme 1920 vyhovujúcich karaván, no nevieme, či neexistujú aj nejaké ďalšie vyhovujúce karavány s 15 ťavami. Tu si len skúsime naznačiť, ako by sa dalo dokázať, že iné možnosti už neexistujú.

Ako prvý krok ukážeme, že medzi dvoma nasledujúcimi ťavami s rovnakým počtom hrbov môže byť najviac jedna ťava s iným počtom hrbov. Nech to tak nie je, t.j. medzi dvoma rovnakohrbými ťavami, povedzme 1-hrbými, sú aspoň dve ťavy s iným počtom hrbov. Určite nemôžu mať rovnaký počet hrbov, lebo by porušili tradíciu. Máme teda nasledujúcu situáciu: .1.2.3.1. Na mieste každej z bodiek môžu (ale nemusia) byť ďalšie ťavy. Ak prejdeme všetky možnosti rozmiestnenia zvyšných dvoch 2- a 3-hrbých tiav, tak zistíme, že musia byť rozložené takto (inač by nevyhovovali tradícii): .2.2.1.2.3.1.3.3. No a teraz sa pokúsme umiestniť poslednú – tretiu – jednohrbú ťavu. Veľmi rýchlo zistíme, že sa to nedá. Takže sme dospeli k tomu, že medzi dvoma rovnakohrbými ťavami môže byť najviac jeden ťava s iným počtom hrbov.

V ďalšom kroku by sme overili to, že ťavy nemôžu byť rozložené nasledovne: .12121. (a to pre žiadnu dvojicu, nie len 1 a 2). Nuž a nakoniec by sme ukázali, že každý zástup spĺňajúci tieto pravidlá je už zahrnutý v nájdených 1920 možnostiach. Tieto kroky vynechávame, no skúste si ich dokázať sami :).