SEZAM, školský rok 2017/18, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
do rúk sa k vám práve dostali zadania tretej, a teda poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Sára, Arthur a Rexík sa veľmi potešili všetkým vaším riešeniam. Zároveň na vás čaká posledná sada úloh, s ktorými potrebujú pomôcť. Využite poslednú možnosť zabojovať o čo najlepšie umiestnenie vo finálnom poradí. Tí najúspešnejší z vás sa môžu tešiť na letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 18. až 27. augusta v Terchovej. Pred tým než sa pustíte do riešenia úloh, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, určite vám to pomôže.
Nakoniec vás ešte chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Ika Hucíková)

Najprv jedna poznámka k nejednoznačnosti v zadaní. Veta „…na každej kocke tvoriacej pyramídu sú vyryté paličky“ sa dala pochopiť až tromi rôznymi spôsobmi. Niektorí v zápale boja o čo najmenší počet paličiek uvažovali aj kocku s 0 vyrytými paličkami. Väčšina z vás to pochopila tak, že na každej kocke je aspoň 1 palička. Ty najdôslednejší si všimli, že je tam napísané paličky, množné číslo, takže na každej kocke budú aspoň dve paličky.

Ospravedlňujeme sa za nejednoznačné zadanie, uznávala som samozrejme všetky spomínané pochopenia zadania. Vzorák je urobený pre verziu, kde je na každej kocke aspoň jedna palička.

Poďme teda zistiť koľko paličiek je na vrchnej kocke. Treba si uvedomiť dve veci. Po prvé, počet paličiek na vrchnej kocke je súčet štyroch rovnakých počtov paličiek na kockách v strednej vrstve. Počet paličiek na vrchnej kocke preto musí byť deliteľný štyrmi.

Po druhé, počet paličiek na vrchnej kocke sa dá zistiť z počtov paličiek v spodnej vrstve. Nejde len o to, aké počty paličiek tam budú, ale aj o to, ako budú rozmiestnené. Označme si teda počty paličiek na kockách v spodnej vrstve *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* a *i* tak ako na obrázku.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Kocky v strednej vrstve potom budú mať počty paličiek:

$a + b + d + e$, $\quad b + c + e + f$, $\quad d + e + g + h$, $\quad e + f + h + i$

Súčet počtov paličiek na týchto štyroch kockách nám dá počet paličiek v najvrchnejšej vrstve. Ten teda bude $a + b + d + e + b + c + e + f + d + e + g + h + e + f + h + i =$
$= 4e + 2(b + d + f + h) + a + c + g + i$

Toto už je celkom jednoduchý výraz, a dá sa jednoznačne určiť koľko najmenej to bude. Treba si ale uvedomiť, že to je len teoretické minimum a nič to nehovorí o tom, aké nakoniec budú počty paličiek *a* až *i*. Ak uvažujeme, že najmenšie číslo, ktoré sa dá použiť je 1, tak $4e + 2(b + d + f + h) + a + c + g + i$ môže byť najmenej $62 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot (2 + 3 + 4 + 5) + 6 + 7 + 8 + 9$.

Problém je, že 62 nie je deliteľné 4. Preto 62 nemôže byť počtom paličiek na vrchnej kocke. Najbližšie číslo väčšie ako číslo 62 a deliteľne 4 je 64. To je teda najmenší možný počet paličiek, ktorý by mohlo byť na vrchnej kocke.

Teraz potrebujeme zistiť, či sa naozaj dá počty paličiek v spodnej vrstve rozmiestniť tak, aby sme na najvrchnejšej kocke dostali 64. Dá sa to napríklad takto:

8	1	9
5	2	4
6	3	7

Na vrchnej kocke je teda 64 čiarok. (Mimochodom, spôsobov, ako rozmiestniť počty paličiek v spodnej vrstve tak, aby na vrchnej kocke bolo 64 paličiek, je viacero. Ja som našla štyri spôsoby. Kto sa chce s touto úlohou ešte trochu pohrať, môže ich skúsiť pohľadať všetky.) Ak by sme si povolili aj 0 paličiek na kocke, tak výsledok bude 48. Napríklad takto:

7	0	8
4	1	3
5	2	6

Ak by sme chceli mať minimálne 2 paličky na každej kocke, tak výsledok bude 80. Napríklad takto:

9	2	10
6	3	5
7	4	8

Poznámka k riešeniu:

Táto úloha bola veľmi ťažká. Už len nájsť výsledok dalo veľa roboty. Preto som za výsledok dávala až 3 body. Dôležité bolo aj poriadne vysvetliť prečo sa menej nedá. To bolo už naozaj ťažké a podarilo sa to málokomu. Veľa z vás objavilo užitočné zlepšováky, napríklad dať najmenší možný počet paličiek do stredu a podobne. To vám síce pomohlo nájsť správne riešenie, ale spoliehať sa na to nedá. V iných úlohách môžu takéto zlepšováky viesť k úplne zlému riešeniu. Na druhej strane občas sa nič lepšie robiť nedá.

Príklad č. 2 (opravoval Mojo Majdiš)

S touto úlohou ste sa popasovali väčšinou dobre a prišlo nám mnoho rôznych riešení. Ukážeme si jedno z nich. Ako prvé si uvedomíme, že číslo ABCABCBBB musí byť deliteľné 10. To znamená, že musí končiť na 0. A teda platí B=0.

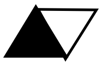
Druhú vec čo si všimneme je, že toto číslo je deliteľné aj 9. A teda aj jeho ciferný súčet je deliteľný 9. Ciferný súčet je $A + C + A + C = 2 \cdot (A + C)$. A teda aj A+C je deliteľné 9 (premyslite si prečo). Keďže A a C sú rôzne cifry, tak platí $A + C = 9$. Takýchto dvojíc A a C je 8, a to: 1 a 8, 2 a 7, 3 a 6, 4 a 5, 5 a 4, 6 a 3, 7 a 2, 8 a 1.

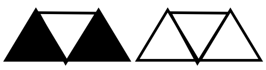
Do čísla ABCABCBBB dosadíme tieto možnosti a skúšame ho deliť číslami od 1 do 17. Ako najvýhodnejšie sa ukazuje deliť ho práve 17. Taká možnosť je totiž jediná a to 306306000. Toto číslo zároveň spĺňa všetky kritéria zo zadania, a teda ide o nami hľadané číslo.

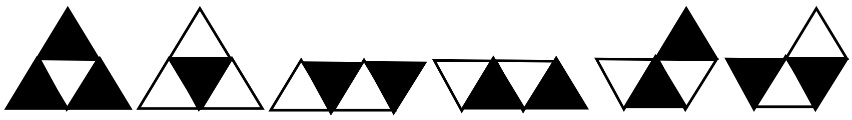
Príklad č. 3 (opravovala Erika Novotná)

Veľký trojuholník sa skladá dokopy zo 49 malých trojuholníčkov, 28 z nich je čiernych a 21 z nich je bielych. Našou úlohou je vyskladať veľký trojuholník z navzájom rôznych dielikov. Pri skladaní sa budeme snažiť použiť čo najviac "malých dielikov". Tak sa skúsme najskôr pozrieť, aké dieliky vlastne máme k dispozícii, pričom začneme kresliť od jedno-trojuholníkových a postupne budeme počet trojuholníčkov v dielikoch zvyšovať a dávať pri tom pozor, či sa na seba náhodou dajú otočiť:

Jedno-trojuholníčkové: 

Dvoj-trojuholníčkové: 

Troj-trojuholníčkové: 

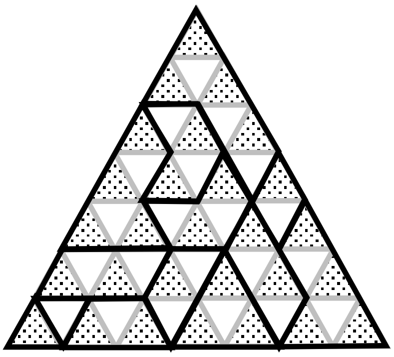
Štvor-trojuholníčkové: 

Viacerí z vás pri riešení úlohy považovali tretí a štvrtý štvor-trojuholníčkový dielik za rovnaký. Skúste si preto tieto dva dieliky vystrihnúť a otočiť na seba. Naozaj sa to dá, aj keď sú zo zadnej strany oba dieliky čisto biele?

Ak by sme pri stavbe použili všetky vyššie nakreslené dieliky, mali by sme dokopy pokrytých celkovo 34 trojuholníčkov, z toho 17 bielych a 17 čiernych. Chýbalo by nám teda pokryť 15 trojuholníčkov, z toho 4 biele a 11 čiernych. Ak by trojuholníčky neboli čierno-biele, dalo by sa to urobiť najviac tromi dielikmi, všetky by museli byť päť-trojuholníčkové. Viacerými nie, lebo dieliky s nižším počtom trojuholníčkov už nemôžeme použiť. Teda teoreticky by sme vedeli veľký trojuholník pokryť 11timi vyššie nakreslenými dielikmi a ďalšími 3mi vhodnými dielikmi zloženými z presne piatich trojuholníčkov.

Ak by sme však začali kresliť dieliky zložené z piatich trojuholníčkov, zistili by sme, že každý z nich je vždy zložený aspoň z dvoch bielych trojuholníčkov a nejakých ďalších čiernych. Ak by sme vybrali tri päť-trojuholníčkové dieliky, vždy by mali dokopy aspoň 3×2, teda šesť bielych trojuholníčkov. My však potrebujeme iba 4 biele trojuholníčky. To znamená, že nevieme doplniť našu vyššie nakreslenú sadu tromi dielikmi a pokryť tak celý veľký trojuholník. A keďže sada pozostávajúca zo 14tich dielikov by nutne musela obsahovať sadu dielikov nakreslenú vyššie, veľký trojuholník sa určite nedá vyskladať zo 14tich dielikov.

Zostáva otázka, či sa dá trojuholník vyskladať z 13tich dielikov. A naozaj sa dá, jedno z mnohých riešení vidíte na obrázku dolu.



Príklad č. 4 **(**opravoval *Adam Kňaze***)**

Mnohí z vás ste začali riešenie tejto úlohy predpokladom, že Rexík, Sára aj Arthur sa pohybovali rovnomernou rýchlosťou. Táto úloha sa ale dala vypočítať aj bez toho, aby sme niečo také predpokladali. Mohlo sa napríklad stať, že Arthur musel v polke cesty zastaviť a zaviazať si šnúrky. Alebo Rexíkovi mohol po 50 metroch dôjsť dych a mohol spomaliť na polovicu. Aké by boli vzdialenosti, ktoré nabehal k Arthurovi a Sáre? Boli by rovnaké, ako v prípade s rovnomernou rýchlosťou? Odpoveď je áno, a navyše sa dá ukázať oveľa krajšie ako babraním sa s rýchlosťami, dráhami a časmi.

Najprv si to ale trochu zjednodušíme, povedzme že Rexík nezačína pri Sáre, ale v bode kde sa všetci napokon stretnú, 13 metrov od Sáry. Zavelíme štart a Rexík sa rozbehne k Arthurovi a po x metroch k nemu aj dobehne. Má teda nabehané x metrov k Arthurovi a 0 k Sáre. Obráti sa a beží naspäť. Keď prebieha bodom v ktorom začínal, pozrieme sa na to, koľko zatiaľ bežal ktorým smerom. K Arthurovi stále x, no keďže sa od neho vrátil rovnakú vzdialenosť, smerom k Sáre tiež nabehal x. Dobre, teraz ide k Sáre y metrov a zase sa vráti y metrov do začiatku, zase sú obe strany vyrovnané.

Mohli by sme ho takto nechať behať ako dlho chceme, ale už je nám pomerne jasné, že v bode, kde začínal, bude skóre vždy vyrovnané. Koľkokoľvek metrov odbehne zo začiatku ktorýmkoľvek smerom, vždy sa musí vrátiť rovnakú vzdialenosť opačným smerom. Vráťme sa teraz k nášmu zadaniu, kde Rexík začína pri Sáre. Jeho prvý beh je smerom k Arthurovi, a cestou prechádza cez bod, v ktorom nakoniec všetci skončia. Má v ňom nabehaných 13 metrov k Arthurovi a 0 k Sáre. V tomto momente si môžeme toto skóre zapísať na papierik, ktorý schováme do vrecka, a tváriť sa, že počty sú vynulované. Vieme, že od tejto chvíle bude v tomto bode skóre vždy vyrovnané. Keď sa tu potom všetci stretnú, vyberieme papierik z vrecka a prirátame tých 13 metrov k vzdialenosti nabehanej k Arthurovi. A máme hotovo – vieme, že akokoľvek dlho a ďaleko Rexík bežal, na konci bude mať k Arthurovi nabehané o 13 metrov viac. Podľa zadania bežal celkovo 85 metrov, odčítame 13 a vydelíme dvoma – dostaneme 36, čo je vzdialenosť nabehaná k Sáre. K Arthurovi potom nabehal 49 metrov.

Poradie po 2.letnej sérii SEZAM 2017/2018

Poradie	Priezvisko a meno	Trieda	Miesto	Doteraz	1.úl.	2.úl.	3.úl.	4.úl.	Prémia	Spolu
1.-2.	Findra Ján	9A	Poprad	25,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	50,0
1.-2.	Zatroch Tomáš	Kvarta B	Chorvátsky Grob	25,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	50,0
3	Gaňová Martina	8	Žilina	24,5	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	49,5
4	Kaločová Eliška	Tercia B	Žilina	25,0	4,0	5,0	5,0	5,0	5,0	49,0
5	Chovancová Veronika	Tercia	Trenčín	25,0	5,0	5,0	3,5	5,0	5,0	48,5
6	Mikuláš František	7	Vidiná	24,0	3,0	5,0	5,0	4,5	5,0	46,5
7	Hladká Zuzana	Tercia A	Bratislava	24,5	3,5	5,0	4,0	5,0	3,0	45,0
8	Kopčány Martin	Tercia	Čierny Balog	24,0	4,0	5,0	3,5	5,0	3,0	44,5
9	Ondovčíková Eva	Tercia	Modra	20,5	5,0	5,0	3,5	5,0	5,0	44,0
10.-11.	Blažeková Stela	8B	Žilina	24,5	2,0	5,0	3,0	5,0	3,0	42,5
10.-11.	Kurčina Marián	Tercia	Dolný Kubín	23,5	3,0	5,0	3,0	5,0	3,0	42,5
12	Zumrik Marek	Kvarta A	Martin	21,5	5,0	5,0	2,0	5,0	3,0	41,5
13.-14.	Rosinská Michaela	9	Feigeres	25,0	2,0	5,0	3,0	5,0	1,0	41,0
13.-14.	Vicáňová Michaela	Sekunda	Dolný Kubín	23,0	4,5	5,0	2,5	3,0	3,0	41,0
15	Vargovčík Samuel	7A	Sabinov	17,0	3,5	5,0	5,0	5,0	5,0	40,5
16.-17.	Glevitzká Viera	8A	Prievidza	23,5	5,0	5,0	5,0	-	1,0	39,5
16.-17.	Láska Ondrej	Tercia	Lučenec	24,5	3,5	5,0	1,5	4,0	1,0	39,5
18	Kaločová Kristína	8A	Žilina	25,0	3,0	5,0	5,0	0,0	1,0	39,0
19	Hladký Matúš	Kvarta B	Bratislava	24,5	3,0	4,5	1,5	5,0	0,0	38,5
20	Greguš Jakub	9B	Bratislava	21,0	2,0	5,0	3,5	5,0	1,0	37,5
21	Jonaštík Matúš	7G	Bratislava	23,0	3,5	5,0	2,5	0,5	1,0	35,5
22.-23.	Gabko Martin	7A	Dolná Mariková	16,5	5,0	3,0	2,0	3,5	3,0	33,0
22.-23.	Kováčik Šimon	Sekunda B	Pezinok	19,5	3,0	5,0	1,5	3,0	1,0	33,0
24.-25.	Kánová Vanesa	Sekunda	Bacúch	22,5	0,0	5,0	1,5	2,5	1,0	32,5
24.-25.	Krivulčík Branislav	9B	Oravská Lesná	16,0	3,0	5,0	2,5	5,0	1,0	32,5
26.-27.	Brezovická Soňa	9	Veľké Uherce	14,5	3,0	5,0	2,5	5,0	1,0	31,0
26.-27.	Halama Matej	9A	Teplička n/V	16,0	5,0	5,0	-	5,0	0,0	31,0
28	Michalková Lujza	Sekunda A	Bratislava	18,5	3,0	5,0	1,5	1,5	1,0	30,5
29	Mores Michal	Tercia B	Žilina	14,0	3,0	5,0	-	5,0	1,0	28,0
30	Mrázik Adrián	8	Teplička n/V	18,0	3,0	5,0	1,5	-	0,0	27,5
31	Kollárová Emília	Sekunda B	Žilina-Strážov	16,0	2,0	5,0	2,0	0,0	1,0	26,0
32	Kaláb Martin	Kvarta B	Bratislava	12,0	5,0	5,0	2,5	1,0	0,0	25,5
33.-34.	Dubovský Jakub	7F	B.Bystrica	16,0	3,5	5,0	-	-	0,0	24,5
33.-34.	Miškaňová Zuzana	Kvarta A	Prešov	14,0	3,0	5,0	2,5	-	0,0	24,5
35	Havlíková Ema	Tercia A	Pezinok	19,5	3,0	.	-	-	0,0	22,5
36	Boškajová Tatiana	9A	Zákamenné	21,5	.	.	.	.	0,0	21,5
37	Belan Matúš	9A	Teplička na Váhom	21,0	.	.	.	.	0,0	21,0
38	Butková Beáta	Sekunda	Byča	9,0	3,5	5,0	-	-	0,0	17,5
39	Beličák Peter	Sekunda	Brezno	16,0	.	.	.	.	0,0	16,0
40	Majerová Diana	Sekunda	Brezno	13,5	.	.	.	.	0,0	13,5
41.-42.	Fillo Timon Lumír	Sekunda	Heľpa	13,0	.	.	.	.	0,0	13,0
41.-42.	Pajunk Matúš	7A	Suchá Hora	13,0	.	.	.	.	0,0	13,0
43.-45.	Bašová Mária	7A	Žilina	12,0	.	.	.	.	0,0	12,0
43.-45.	Bížová Anna	Tercia	Horná Lehota	4,5	2,5	5,0	-	-	0,0	12,0
43.-45.	Filippová Oľga	7	Liptovký Ján	7,0	-	5,0	-	-	0,0	12,0
46	Cedzová Beata	7B	Hvozdnica	4,5	3,0	4,0	-	-	0,0	11,5
47	Krčmáriková Anna	7A	Skalité	11,0	.	.	.	.	0,0	11,0
48.-50.	Bušová Tatiana	7A	Hladovka	10,0	.	.	.	.	0,0	10,0
48.-50.	Fukasová Ema	8A	Vitanová	10,0	.	.	.	.	0,0	10,0
48.-50.	Ježíková Gabriela	7B	Pezinok	0,0	3,0	5,0	1,0	0,0	1,0	10,0
51	Šinálová Erika	A	Suchá Hora	9,0	.	.	.	.	0,0	9,0
52	Majtényiová Karin	8	Vysoká nad Kysucou	5,0	.	.	.	.	0,0	5,0
53	Lenka Písaná	8	Jahodník	0,5	.	0,5	.	.	0,0	1,0