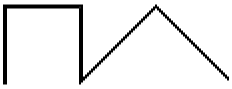
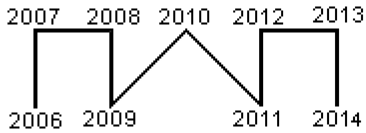
SEZAMKO 2007/2008, Vzorové riešenia 1. série letnej časti

Milí riešitelia,
kope vašich pekných riešení sme sa my, trpaslíci a Snehulienka veľmi potešili. Sme radi, že ste si na riešeniach dali záležať a potrénovali si svoje matematické svaly. Netreba ich ale nechať dlho oddychovať. V druhej sérii na vás čakajú štyri nové príhody, ktoré zažila Snehulienka s trpaslíkmi. Aby boli vaše riešenia nabudúce ešte lepšie, pomôže Vám aj prečítanie týchto vzorových riešení. Snažíme sa vám v nich napísať, ako sa dali úlohy riešiť, na čo ste nemali pri riešení zabudnúť a podobne...
Ešte malá prosba – skúste si v poradí skontrolovať svoje údaje. Pokiaľ sú náhodou nesprávne, dajte nám o tom spolu s ďalšou sériou vedieť. Nezabudnite poriadne vypĺňať hlavičky na riešeniach a posielať nám aj vypísané obálky, aby opravené riešenia spolu s novými zadaniami dorazili na správnu adresu.
Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú trpaslíci, Snehulienka a organizátori.

Úloha 1 (opravoval Miro a Didi Hudec)
Pri pozornom čítaní zadania v ňom nájdeme, že „takto to rovnako pokračuje ďalej“. Z toho vyplýva, že na mape budú nejaké opakujúce sa časti. Pri bližšom pohľade si môžeme všimnúť, že to čo sa opakuje, je toto:



Dĺžka tohto úseku je päť ciest, pretože sme 5-krát prešli do nasledujúceho mesta. Keď položíme 400 takýchto úsekov za seba, dostaneme sa veľmi blízko miest, ktoré nás zaujímajú. Ak použijeme tento úsek 401-krát, prešli sme cez 2005 miest. **Začínali sme v meste číslo 1, takže teraz sa nachádzame v meste číslo 2006 a sme v pravom dolnom vrchole striešky.** Ak budeme pokračovať ďalej v kreslení, dostávame, že úsek medzi mestami 2006 a 2014 vyzerá takto:



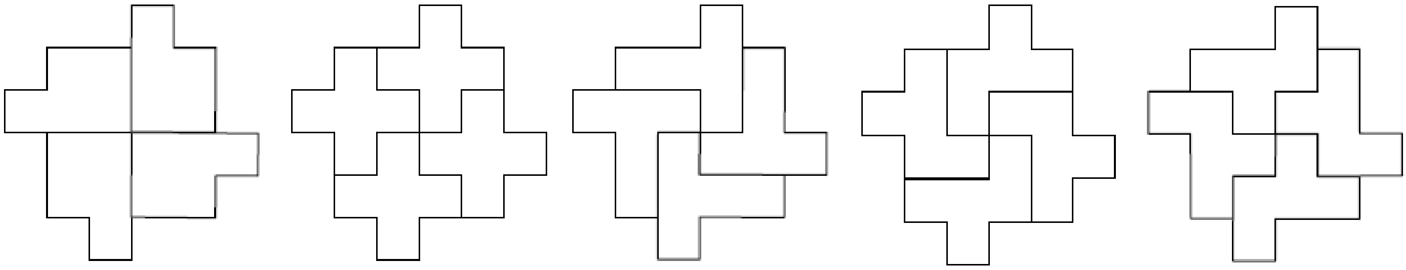
Toto samozrejme nie je jediný správny postup, mnohí ste si všimli napríklad to, že na vrchole striešky sú vždy násobky čísla päť. Z toho vieme, že mesto 2010 je na vrchole striešky. Dokresliť úseky cesty od mesta 2010 smerom dozadu k mestu 2006 aj smerom dopredu k mestu 2014 už nie je ťažké.

Úloha 2 (opravovala Ika Bachratá)
Skúšať všetky čísla od 1 do 1000 by trvalo dlho. Našťastie sa dajú niektoré možnosti vylúčiť bez skúšania. Najskôr sa zamyslime nad tým, ktoré z čísel od 1 do 1000 má najväčší ciferný súčet. Najväčšie číslo je 1000, jeho ciferný súčet je ale len 1+0+0+0 = 1, čo asi najviac nebude.
Ostatné čísla sú jednociferné, dvojciferné alebo trojciferné. Najväčší ciferný súčet zo všetkých trojciferných čísel má číslo 999, lebo má na mieste jednotiek, desiatok aj stoviek najväčšiu možnú cifru. Jednociferné ani dvojciferné čísla už tak veľký ciferný súčet mať nebudú, lebo sa do nich už toľko deviatok ako do 999 nezmestí. Číslo 999 ma ciferný súčet 9+9+9 = 27. Každé číslo od 1 do 1000 bude mať ciferný súčet najviac 27, pretože 27 je najväčší ciferný súčet spomedzi týchto čísel. Zo zadania vieme, že hľadané číslo je 4-krát väčšie ako jeho ciferný súčet. To, že ciferný súčet čísel od 1 do 1000 nie je väčší ako 27 znamená, že **hľadané číslo nemôže byť väčšie ako 4.27 = 108**.
Ďalej vieme, že hľadané číslo je násobkom štyroch, lebo je štvornásobkom svojho ciferného súčtu. Takže už vieme, že nemusíme skúšať všetky čísla od 1 do 1000, ale len tie čísla od 1 do 108, ktoré sú deliteľné štyrmi. Zrátame teraz každému takémuto číslu jeho ciferný súčet a vynásobíme ho štyrmi. Ak sa to bude rovnať pôvodnému číslu, číslo je jedným z možných počtov buchiet. Naše skúšanie si kvôli prehľadnosti zapíšeme do tabuľky:

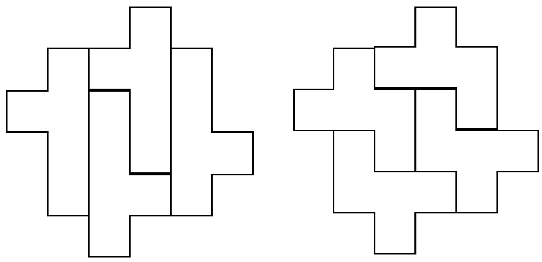
Číslo	**Ciferný súčet**	**Jeho štvornásobok**	**Vyhovuje?**
4	4	16	
8	8	32	
12	3	12	Vyhovuje!
16	7	28	
20	2	8	
24	6	24	Vyhovuje!

Takto vyskúšame aj ďalšie čísla 28, 32, 36, ..., 108. **Zistíme, že zo všetkých čísel vyhovujú podmienke zo zadania len čísla 12, 24, 36, 48 a žiadne iné. Snehulienka teda mohla napiecť 12, 24, 36 alebo 48 buchiet.**

Úloha 3 (opravovali Kika Kovalčíková a Kaja Janíková)
Najprv si treba všimnúť, že každý trpaslík má na starosti 5 záhonov. To preto, že záhonov je 20 a trpaslíci sú štyria. Druhá dôležitá vec je, že z každej strany záhrady vytŕča jeden záhon. Ak by sme chceli spojiť dva takéto vytŕčajúce záhony a dať ich jednému trpaslíkovi, minuli by sme na to viac ako 5 záhonov. Vzniknutá záhradka by bola na jedného trpaslíka priveľká, preto to takto nemôžeme spraviť. Z toho máme, že každý vytŕčajúci záhon bude patriť jednému trpaslíkovi. Keďže vytŕčajúci záhon susedí stranou len s jedným ďalším záhonom, tak aj ten má presne určeného majiteľa. Takto zostalo už len 12 nerozdelených záhonov, z ktorých osem leží na kraji štvorca a štyri sú v strede.
Ak chceme hľadať symetrické riešenia (to sú také, že keď obrázok otočíme okolo stredu, bude vyzerať presne tak isto), stačí si uvedomiť, že týchto 12 záhonov sa musí rovnako rozdeliť medzi štyroch trpaslíkov. Takže každý dostane dva záhony z kraja a jeden zo stredu. Navyše netreba zabudnúť na podmienku, že všetkých päť záhonov musí byť prepojených stranou. S týmito vedomosťami vieme nakresliť týchto päť rôznych rozdelení záhradky:



To ale nie je všetko. Sú totiž aj také rozdelenia záhradky, ktoré nie sú celkom symetrické. **Keď ich otočíme o 90°, tak nevyzerajú takisto ako predtým** (skúste si to). Také rozdelenia sú dve:



Úloha má spolu sedem rôznych riešení, ale ako ste si určite všimli, tieto riešenia sú poskladané len z piatich rôznych tvarov.

Úloha 4 (opravovala Erika Trojáková)
Označme si náš trojuholník so stranami 5, 12 a 13 metrov ako *ABC* a pekne si ho nakreslime. Našou úlohou je zistiť, kam presne treba umiestniť bod *D* na najdlhšiu stranu *BC* trojuholníka ABC tak, aby mali dva menšie trojuholníky rovnaký obvod. Tieto menšie trojuholníky majú spoločnú stranu *AD*.
Ak chceme, aby mali menšie trojuholníky rovnaký obvod, stačí, aby bol súčet dĺžok |*AC*|+|*CD*| rovný súčtu dĺžok |*AB*|+|*BD*|. Vieme, že súčet všetkých štyroch dĺžok |*AC*|+|*CD*|+|*AB*|+|*BD*| je rovný 30 metrov, teda obvodu celého trojuholníka. Keďže chceme, aby |*AC*|+|*CD*| bolo rovné |*AB*|+|*BD*|, musí byť potom |*AC*|+|*CD*| = 30/2 metrov a súčasne |*AB*|+|*BD*| = 30/2 metrov. Odtiaľ už pekne vidíme, že |*BD*| = 15 – 5 = 10 metrov a |*CD*| = 15 – 12 = 3 metre.
Takže bod *D* treba umiestniť na stranu *BC* tak, aby jeho vzdialenosť od bodu *B* bola 10 metrov a jeho vzdialenosť od bodu *C* bola 3 metre.