SEZAMKO 2008/2009, Vzorové riešenia 3. série letnej časti

Milí naši riešitelia,
plavba posádky kapitána Dlhofúza je na konci. Dúfame, že ste z nej nedostali morskú chorobu a sú z vás správni morskí vlci. V tomto školskom roku k vám posledný krát prichádza zásielka s opravenými riešeniami a vzorovými riešeniami SEZAMKa. Nemusíte ale smútiť, budúci rok vám v septembri opäť pošleme nové zadania spolu s novými rozprávkovými hrdinami. Ak ste teraz šiestaci, nebudete už riešiť SEZAMKa, ale môžete sa tešiť na jeho staršieho brata SEZAM.

Ak ste sa celý rok poriadne snažili, namáhali si svoje mozgové bunky a boli dostatočne vysoko v poradí, v obálke ste si našli aj pozvánku na sústredenie najlepších riešiteľov. Od 4. do 6. júna na vás v Pružine pri Púchove čaká kopa zábavy, noví kamaráti a ako inak, aj trocha matematiky.

Tešia sa na vás a pekné letné prázdniny vám želajú organizátori SEZAMKa.

Úloha 1 (opravovala Kika Kovalčíková)

Začnime ofarbovať okno tak, že najprv zaplníme stredné políčko nejakou farbou. Vyfarbime ho napríklad modrou. Kde inde môžeme dať ostatné dve modré políčka? Nemôžu byť nad ním ani vedľa neho, inak by sme dostali riadok alebo stĺpec, ktorý by mal dve rovnaké farby. Teda zostávajú už len rohové sklíčka. A aby platilo, že v každom stĺpci aj riadku sú všetky sklíčka rôzne, modrá farba musí byť na uhlopriečke.

Uhlopriečky sú dve, nakreslime si teda najprv tú z ľavého dolného rohu do pravého horného rohu. Skúsme teraz k modrej farbe dokresliť bielu napríklad do prvého riadku. Tam máme dve možnosti. Dôležité je všimnúť si, že keď bielu v prvom riadku nakreslíme hocikam, už si nemôžeme nič vymýšľať. Všetky ostatné políčka už musíme dokresliť len jediným spôsobom, aby platilo to, čo je v zadaní. Do zostávajúceho políčka v prvom riadku treba nakresliť červenú. Tým vznikne stĺpec, ktorý už má ofarbené dve políčka a na tretie musíme dať zostávajúcu farbu. Takto sa dá ďalej zafarbiť celé okno.

Čo je teda zatiaľ dôležité? Keď máme štvorec, ktorý má na jednej uhlopriečke modrú, tak ho vieme správne doplniť už len dvoma spôsobmi. Tieto dva spôsoby sa líšia len tým, že sú navzájom prehodené biela s červenou farbou.

Zoberme si teraz štvorec, ktorý má modrú uhlopriečku otočenú inak. Uhlopriečka pôjde z ľavého horného do pravého dolného rohu. Koľkými spôsobmi vieme teraz doplniť okno? No tiež dvoma. Je to ten istý prípad, ktorý bol rozoberaný pred chvíľou, len zrkadlovo otočený.

Takže keď je stredné políčko zafarbené modrou farbou, **máme dokopy 4 možnosti vyfarbiť ho do konca**. A čo keď stredné políčko zafarbíme na začiatku bielou? Rovnakými úvahami, ako pri modrej farbe zistíme, že vieme tiež nakresliť 4 okná. Podobne to bude aj s červenou, tiež máme 4 možnosti, ako okno vyfarbiť do konca. **To je spolu 3.4 = 12 možností.**

Na obrázku sú nakreslené prvé dve možnosti s modrou uhlopriečkou. Ďalšie dve možnosti dostaneme ich zrkadlovým otočením. A všetky ostatné možnosti dostaneme tak, že na uhlopriečku nedáme modrú, ale bielu a neskôr aj červenú farbu.

B	C	M
C	M	B
M	B	C

C	B	M
B	M	C
M	C	B

Úloha 2 (opravovala Erika Trojáková)

Predtým, ako si začnete čítať vzorové riešenie druhej úlohy, vezmite si do ruky pero a papier. Popri čítaní si skúste výpočty písať na papier. Našou úlohou je zistiť, aké čísla boli na Dlhofúzových kartách. Vieme však o nich iba to, že na každej z nich bola napísaná jedna z cifier 0 až 9. Pokojne teda mohli byť na kartách napísané tri rovnaké cifry. Alebo mohli byť na kartách dve rovnaké cifry a tretia mohla byť iná. Alebo mohli byť cifry na kartách všetky rôzne.

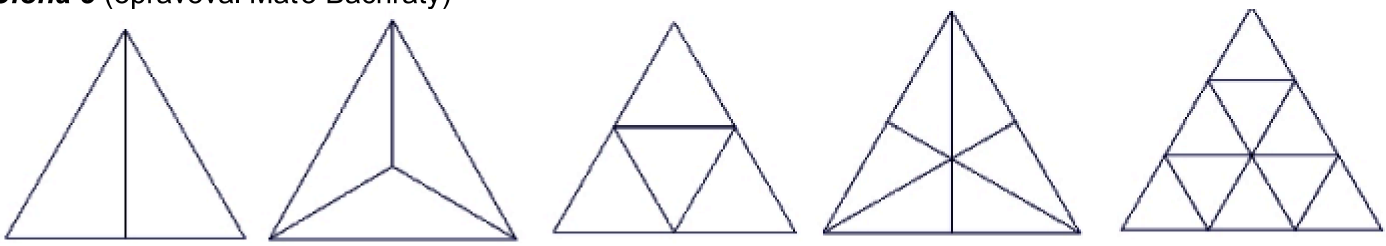
Najprv sa pozrime na prípad, že by boli na kartách **tri rovnaké cifry**, označme si ich A. Súčet najväčšieho a druhého najväčšieho čísla by bol vtedy AAA+AAA (lebo je iba jedna jediná kombinácia cifier). To by ale ich súčet musel byť párne číslo (také, ktoré má poslednú cifru A+A), ale 1233 je nepárne. V tomto prípade sme riešenie nenašli.

Preskúmajme teraz prípad, že by **dve cifry boli rovnaké a tretia iná**. Označme rovnaké dve písmenom A a tretiu, ktorá je iná, číslom B. Máme dve možnosti:

1. možnosť – **B je väčšie ako A** (napríklad B = 4, A = 2). Potom najväčšie číslo je BAA a druhé najväčšie číslo je ABA. Súčtom takýchto dvoch čísel však získame párne číslo (také, ktoré má poslednú cifru A+A). Náš súčet má ale byť 1233, čo je nepárne číslo. Čiže medzi takýmito kartami riešenie nenájdeme.
2. možnosť – **A je väčšie ako B**. Potom najväčšie číslo je AAB a druhé najväčšie číslo je ABA. Súčet čísel má byť 1233. Potom, ako ste všetci zistili, **musí byť A = 6** (rozmyslite si prečo). Keď **A = 6, tak B musí byť 7**, aby súčet dvoch čísel AAB a ABA končil trojkou. No ale potom B = 7 by bolo väčšie ako A=6 a najväčšie číslo by nebolo AAB, ale iné. Takže ani tu nemáme riešenie.

Napokon skúmajme tretí prípad, že cifry na kartách **sú všetky rôzne**, označme si ich podľa veľkosti A, B, C (od najväčšej po najmenšiu). Najväčšie a druhé najväčšie číslo je potom ABC a ACB. Všimnime si, že majú rovnakú prvú cifru A. **Táto cifra A musí byť 6**, lebo 5 by bolo málo a 7 priveľa. Zostáva už len určiť zvyšné dve čísla. Vieme, že zatiaľ naše čísla vyzerajú 6BC, 6CB. Súčet dvoch čísel BC+CB má byť 33, teda každé z nich je menšie ako 33. To ale znamená, že každé z čísel B, C musí byť menšie alebo rovné trom. Ak by C = 3, tak potom B = 0. Ak by C = 2 tak potom B = 1. Ak by C = 1 dostávame tú istú možnosť, ako keď C = 2. Ak by C = 0 dostávame tú istú možnosť ako keď C = 3. Vyšli nám iba dve možnosti, a to, že **na kartách sú napísané čísla 6, 0, 3 alebo 6, 1, 2**.

Úloha 3 (opravoval Maťo Bachratý)



Na dve rovnaké časti sa dá rovnostranný trojuholník rozdeliť spojnicou ľubovoľného vrcholu a stredu protiľahlej strany (taká čiara sa volá ťažnica). Na tri časti rozdelíme trojuholník tak, že pospájame priesečník jeho ťažníc s každým vrcholom trojuholníka. Na štyri časti ho rozdelíme pospájaním stredov strán nášho trojuholníka. Na šesť častí rozdelíme trojuholník nakreslením všetkých troch ťažníc. Na deväť častí rozdelíme trojuholník tak, že si na každej strane vyznačíme dva body, jeden v tretine a druhý v dvoch tretinách. Tieto body pospájame rovnobežkami so stranami trojuholníka, čím dostaneme deväť menších rovnostranných trojuholníkov.

Nakreslenie správnych obrázkov ešte nestačilo na plný počet bodov. Podľa zadania ste mali vysvetliť, prečo sú vytvorené trojuholníky rovnaké. K tomu treba ukázať, že majú **rovnako veľké strany a rovnaké veľké uhly medzi nimi**. O to sa pokúsili len niektorí z vás. Mnohí ale presne popísali spôsob, ako veľký trojuholník delili na menšie, z čoho sa už zhodnosť trojuholníkov dá odvodiť. Aj za takéto riešenia sme preto dávali päť bodov.

Úloha 4 (opravovala Kačka Bachratá)

Táto úloha bola naozaj veľmi náročná. Preto sme na vás veľmi pyšní, že ste sa do nej s takým nadšením pustili a hru vyskúšali. Dokonca ste zistili, že sme nechtiac skomplikovali zadanie, keď sme ako príklad hry uviedli iné vyhrávajúce a prehrávajúce trojice, než boli uvedené na pergamene. Všetci, ktorí hru dvadsaťkrát hrali podľa pravidiel, zistili, že vyhráva trojica PNN. Zdôvodnenia neboli vždy úplne presné, ale to bolo naozaj ťažké. Na plný počet bodov stačilo, keď ste správne popísali 20 hier a zistili, ktorá séria má vyššiu šancu.

Výhra je totiž určená prvými dvoma hodmi. Pri prvej dvojici NN vyhráva séria NNP. Pri ostatných situáciách, teda keď ako prvé padnú PP alebo NP alebo PN, vyhráva séria PNN.

Vyskúšajme si, ako môžu vyzerať hry začínajúce **dvojicou NN**:

N**NNP** alebo NN**NNP** alebo NNNNNN**NNP** alebo NNN**NNP** alebo inak, ale vždy končia výhrou **NNP**.

Teraz si vyskúšajme, ako môžu vyzerať hry začínajúce **dvojicou PP**:

PPPNPNP**PNN** alebo PPN**PNN** alebo P**PNN** alebo PNPNPNPNPNPPPP**PNN** alebo všelijako inak, ale vždy končia výhrou **PNN**.

Vyskúšajme si, ako môžu vyzerať hry začínajúce **dvojicou NP**:

NPNPPP**PNN** alebo NP**PNN** alebo N**PNN** alebo NPNPNPNPNPP**PNN** alebo všelijako inak, ale vždy končia výhrou **PNN**.

Nakoniec si vyskúšajme, ako môžu vyzerať hry začínajúce **dvojicou PN**:

PNPN**PNN** alebo PN**PNN** alebo PNPPP**PNN** alebo PNPNPNPP**PNN** alebo všelijako inak, ale vždy končia výhrou **PNN**.

Pretože NN, NP, PN a PP majú rovnaké šance, tak začiatok NN nastane iba v štvrtine prípadov. Rovnako aj výhra série NNP nastane teoreticky iba v štvrtine prípadov. Niekedy by sa síce mohlo stať, že NNP pri dvadsiatich hrách nastane častejšie, ale je to veľmi nepravdepodobné. A ak vás hra bavila, skúste zistiť, ako to bude so sériou NPN. Aj keď je to neuveriteľné, táto séria je lepšia ako PNN, ale horšia ako NNP. Vyskúšajte a na sústredení sa o tom porozprávame...