SEZAMKO 2016/2017, Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Milí riešitelia,
ani sme sa nenazdali a už sa nám treba s vami na čas rozlúčiť. Opravili sme totiž poslednú sériu SEZAMKa v tomto školskom roku. S tými, ktorým sa darilo najviac, sa ale ešte lúčiť nemusíme, lebo sa s nimi stretneme už onedlho na sústredení v Rajeckej Lesnej.
Alica a Maťo vám všetkým veľmi pekne ďakujú za všetky matematické problémy, s ktorými ste im pomohli. V septembri k vám do schránok (ak ste nám v hlavičkách písali správnu adresu) zavítajú noví rozprávkoví hrdinovia.
Nechajte sa prekvapiť, kto to bude tentoraz. Pokiaľ ste už šiestaci alebo primania, starší brat SEZAMKa – volá sa SEZAM, na Vás určite bude myslieť a pošle vám svoje zadania. Aby ste aj budúci rok patrili k tým najlepším, nezabudnite si prečítať aj tieto vzorové riešenia...
Úspešný koniec školského roka a pekné prázdniny vám želajú všetci vedúci SEZAMKa

Príklad č. 1 *(opravovali Lenka a Miro Hudecovci)*

Našou úlohou je nájsť všetky číslice A a B také, aby platilo, že A + 4 · BBB = ABBB. Prvá dôležitá vec je uvedomiť si, že číslica je jednociferné číslo. Takže za B môžeme dosadiť len čísla od 1 po 9 (v našom riešení vylučujeme cifru 0, keďže bežne číslo 0 nie je štandardne zapisované ako 000). Teraz nám stačí prejsť týchto 9 možností a pre každú z nich skúsiť nájsť vhodné A tak, aby sedela daná rovnosť. Ako takéto A nájsť, si ukážeme na príklade, kde B = 1.

Máme rovnosť: A + 4 · 111 = A + 444 = $\overline{\text{A111}}$ (čiara nad textom znamená ciferný zápis čísla). Potrebujeme teda k 4 pripočítať také jednociferné A, aby výsledok tohto súčtu končil na cifru 1. Také je len číslo 7. Po dosadení dostaneme: 7 + 4 x 111 = 451 na ľavej strane rovnice, 7444 na pravej strane. Vidíme, že tieto dve čísla sa nerovnajú a teda pre B = 1 nevieme nájsť A tak, aby sedela rovnosť zo zadania. (Skús si tento postup napríklad pre B = 2 alebo napr. B = 5.)

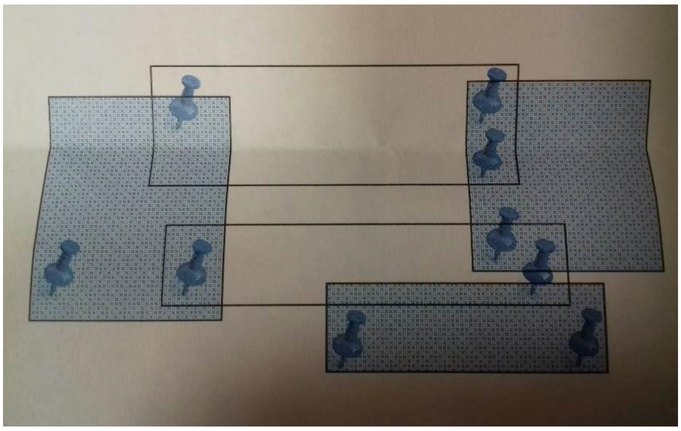
Ukážme si ešte možnosť, ktorá bude fungovať. Nech B = 3. Potom A + 4 · 333 = A + 1332 = $\overline{\text{A333}}$. Aké číslo potrebujem pripočítať k číslu 2, aby som dostala 3? Také jednociferné číslo je len číslo 1. Po dosadení 1 za A dostávame: 1 + 1332 = 1333, čo sedí zo zadaním a teda sme našli správnu dvojicu A a B. Ďalšie takéto dvojice (A, B) sú (2, 6) a (3, 9). Skontroluj nás a over, že tieto dvojice naozaj fungujú!

Táto úloha má teda 3 správne riešenia, sú nimi dvojice (A, B): (1, 3), (2, 6) a (3, 9).

Príklad č. 2 (*opravovala Kačka Bachratá*)

Na nástenku stačilo 9 špendlíkov a na menej sa to už nedalo. Najviac sa mi páčilo vysvetlenie Majky Kollárovej, ktorá napísala, že najprv našla 3 papiere (na obrázku sú to tie modré), čo sa navzájom neprekrývali. Na tie tri budeme musieť použiť 9 špendlíkov. Keď pridáme zvyšné dva papiere, tie už sa prekrývajú s našimi modrými a môžeme na ne použiť špendlíky, ktoré už držia modré papiere. Pozri si Majkin obrázok.

Na pripevnenie piatich papierov potrebujeme najmenej 9 špendlíkov.



Príklad č. 3 *(opravoval Hynek Bachratý)*

Niektorí sa pokúšali riešiť príklad „od začiatku". Zobrali si napríklad 1 000 cukríkov a vystúpili na prvý schod. Polovicu, teda 500 tam nechali a s druhou polovicou išli o schod vyššie. Cestou jeden zjedli a zostalo im 499, ktoré sa už nedajú rozdeliť na polovicu. Teda začiatok bol zlý a treba to skúsiť s ďalším číslom, napríklad 1 002. Takto riešiť príklad je ale veľmi nešikovné. Pre väčšinu čísel sa nakoniec nebude dať niečo rozdeliť na polovicu. A aj keď sa to tak zdá, nemusíte skončiť na predposlednom schode s dvomi, ale s iným počtom cukríkov. Nájsť správny počet cukríkov týmto spôsobom je (bez použitia počítača) príliš prácne.

Ale aj bez počítača je úloha ľahšia, keď začnete uvažovať odzadu a po schodoch klesať. Ak ste na predposledný schod prišli s 2c., z predchádzajúceho ste išli s 3c. (jeden ste zjedli cestou) a tak isto 3c. ste na neho položili. Na predchádzajúci schod ste teda prišli so 6c. Takto môžete počítať ďalej, a výsledky je najlepšie kresliť si na obrázok schodov alebo do tabuľky:

Schod	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*
Prišiel s cuk.	***1*** *(pre A)*	***2***	***6***	***14***	***30***	***62***	***126***	***254***	***510***	***1022***
Odložil cuk.	***0***	***1***	***3***	***7***	***15***	***31***	***63***	***127***	***405***	***511***

Schody síce máme očíslované odhora, ale pre určenie ich počtu to je jedno. Teraz, keď začneme odspodu vidíme, že na prvý schod sme vystúpili s 1022c., polovicu 511c. nechali na mieste a s 510c (jeden sme zjedli) prišli na ďalší chod atď. Správna odpoveď je teda 1022 cukríkov a 10 schodov. Pri takomto zápise sa aj ľahko skontroluje, že naozaj delíte, jete a odkladáte správne počty cukríkov a skončíte tak, ako je napísané v zadaní.

Tým sa dalo vyhnúť chybe, ktorú spravili viacerí z vás, keď z predposledného schodu zle „cúvli" a na schode pred tým mali len 5 cukríkov. To by ale zodpovedalo tomu, že z tých 5 najskôr jeden zjedli, až potom polovicu (5-1)/2=2c. položili a s polovicou 2c. vyšli hore. Takto sa spätne dostali k číslu 1534. Keby si ale skúsili s ním začať a správne deliť a jesť, na predposledný schod by prišli len s 1c.

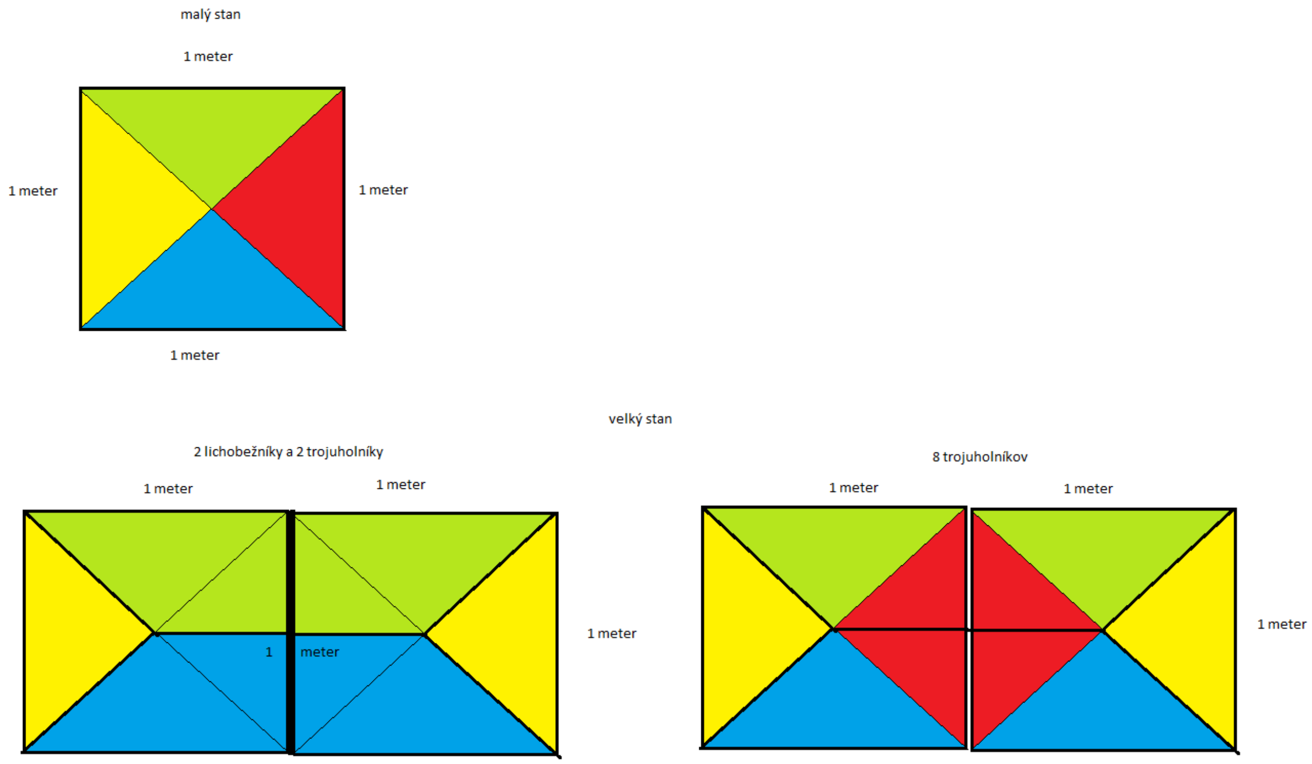
Alica s Maťom mali na začiatku 1022 cukríkov.

Príklad č. 4 *(opravovala Denisa Múthová)*

Našou úlohou je zistiť koľkokrát viac plátna je treba na výrobu veľkého stanu pri porovnaní s malým stanom. Prvý malý stan má štvorcovú podstavu s rozmermi 1 × 1 meter a štyri rovnaké trojuholníkové steny. Druhý veľký stan má štvorcovú podstavu s rozmermi 1 × 2 metre, dva rovnaké trojuholníky a dva rovnaké lichobežníky.

Obdĺžnik s rozmermi 1 × 2 metre veľkého stanu vieme rozdeliť na dva štvorce po 1 × 1 meter zhodné so štvorcom malého stanu:

Každý z lichobežníkov veľkého stanu vieme rozdeliť na tri zhodné trojuholníky



rovnaké ako trojuholníky malého stanu (pozrite si obrázok 2):

Koľko má veľký stan dokopy zhodných trojuholníkov? Dva po bokoch, tri a tri novovzniknuté z lichobežníkov, teda spolu osem trojuholníkov. A teda veľký stan ma osem trojuholníkov a dva štvorce, a malý stan má štyri trojuholníky a jeden štvorec.

To znamená, že veľký stan je dva krát väčší ako malý stan.