JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVI. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2022/2023, 3. zimná séria

Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (*opravoval Hynek Bachratý****)***

Aj keď úloha mala jednoduché zadanie, riešili ste ju viacerými zaujímavými spôsobmi. Pripomeniem zadanie: v jednom kruhu stojí 40 detí a držia sa za ruky. (Aj keď sme to nenapísali, všetci ste správne predpokladali, že ide o normálne bytosti s jednou pravou a jednou ľavou rukou.) Z týchto detí 22 povedalo, že drží (aspoň) jedného chlapca, a 30, že (aspoň) jedno dievča.

Väčšina z vás si všimla, že 22 + 30 je viac ako 40, a teda niektorí musí držať chlpaca aj dievča. Viac spôsobmi sa dalo zistiť, že takých bude 12 detí, a potom 10 drží oboma rukami chlapca a 18 oboma rukami dievča. (Pekná úvaha napríklad bola, že keď 30 drží aspoň jedno dievča, zvýšných 10 ani jedno, a teda len chlapcov.) Ako teraz ďalej?

Viacerí z vás pokračovali asi najjednoduchšou cestou, keď na základe tohto spočítali chlapčenské a dievčenské ruky. Keďže 12 detí drží presne jednu chlapčenskú a 10 detí presne dve chlapčenské ruky, spolu ich je $12 + 2 \cdot 10 = 32$. A keďže každý chlapec má dve ruky, je ich $32 : 2 = 16$. Podobne dievčat je polovica z $12 + 2 \cdot 18 = 48$ dievčenských rúk, teda 24. Pre kontrolu, spolu je to naozaj 40. Ale keďže naša úvaha je správna, nie je to prekvapenie. Niektorí miesto rúk podobne spočítali koľko je držaných chlapcov a dievčat, a čísla potom tiež delili dvomi, lebo každe dieťa držia jeho dvaja susedia. Aj toto vysvetlenie je v poriadku.

Problém ale bol, keď ste pri úvahách to, akého suseda držím, začali zamienať za to, kto svojich susedov drží. Táto úvaha síce viedla k číselne správnemu výsledku, ale nebola úplne správna.

Druhá veľká skupina riešení vychádzala z toho, že ste našli také rozostavenie detí, ktoré vyhovovalo zadaniu. Nebolo to vôbec jednoduché, a často ste na to využili rôzne zaujímavé nápady a pozorovania, ako súvisí počet chlapcov, dievčat a ich rozostavenie s počtom držaní. Väčšinou ste ale našli len jediné vyhovujúce rozostavenie, pričom v každom z nich vyšiel správny výsledok 24 dievčat a 16 chlapcov. Vyhovujúcich rozostavení je ale naozaj veľa. To, že v <u>každom</u> z nich bude počet 24 a 16, vôbec nie je samozrejmé, a bolo to treba tiež zdôvodniť.

Snáď najzaujímavejšie bolo zistenie, ktoré si všimli niektorí z vás. Ak je rozdiel počtu detí napríklad (ako v našej úlohe) $24 - 16 = 8$, bude rozdiel počtu detí, ktoré držia aspoň jedno dievča a počtu detí, ktoré držia aspoň jedného chlapca, tiež vždy 8. Pri niektorých rozostaveniach 24 dievčat a 16 chlapcov to teda bude našich 30 a 22, inokedy 28 a 20 alebo 32 a 24, ale vždy s rozdielom 8. Pokiaľ by bolo v kruhu rovnako veľa chlapcov a dievčat, počet držaní bude vždy rovnaké číslo, napríklad 20 a 20 (ak stoja na striedačku), alebo 22 a 22, ak stoja chlapci spolu a dievčatá spolu. Pomocou tohto princípu sa tiež dalo nájsť riešenie našej úlohy, ale nájsť jeho vysvetlenie bolo poriadne zložité.

Úloha č. 2 (*opravovali Kristína Ďuračíková a Marián Kurčina****)***

Poďme sa pozrieť na to, ako sa menia žiarovky v štvorci 2 x 2 pri prepínaní. Čo sa týka počtu žiaroviek v štvorci, máme päť rôznych situácií:

1) Máme 4 zhasnuté žiarovky:
Po zmene nám pribudnú 4 rozsvietené žiarovky.

2) Máme 1 rozsvietenú a 3 zhasnuté:
Po zmene budeme mať 3 rozsvietené žiarovky a 1 zhasnutú, v sieti nám pribudnú 2 rozsvietené žiarovky.

3) Máme 2 rozsvietené a 2 zhasnuté:
Po zmene budeme mať opäť 2 rozsvietené a 2 zhasnuté, teda počet rozsvietených žiaroviek v sieti sa nezmení.

4) Máme 3 rozsvietené žiarovky a 1 zhasnutú:
Po zmene budú v štvorci 3 zhasnuté a 1 rozsvietená, v sieti bude o 2 rozsvietené žiarovky menej.

5) Máme 4 rozsvietené žiarovky:
Po zmene bude o 4 rozsvietené žiarovky menej.

Môžeme si všimnúť, že pri každej zmene sa nám počet rozsvietených žiaroviek zmení o **+4**, **+2**, **0**, **−2** alebo **−4** žiarovky. Na začiatku mal vedec jednu rozsvietenú žiarovku, čo je nepárny počet. Každou zmenou vie počet žiaroviek zmeniť o párne číslo, teda stále ich bude nepárny počet. Nikdy nebude mať presne štyri zasvietené žiarovky, ktoré by sa dali usporiadať do políčka 2x2 a potom všetky naraz zhasnúť.

Všetky žiarovky vo vedcovej sieti sa nedajú zhasnúť.

***Úloha č. 3** (opravovali Miška Vicáňová a Kubo Kaloč)*

Pokiaľ máme obyčajnú hraciu kocku, vieme z aktuálneho čísla vždy dostať štyri ďalšie, keďže to posledné číslo je oproti nášmu danému. To znamená, že napríklad z jednotky sa vieme dostať do čísel 2, 3, 4, 5. Môžeme teda začať tým, aký je najmenší možný súčet, ktorý vieme dostať, a teda aký je najmenší počet konárov.

Začíname na jednotke a teda máme k dispozícii ešte 21 ďalších čísel. Keďže chceme najmenší súčet, potrebujeme stále opakovať čo najmenšie čísla. Ideálne ak by sa nám tam podarilo mať všetky jednotky – to sa ale nedá, takže tam budú aj nejaké tie dvojky. Keďže z jednotky sa vždy vieme dostať na dvojku a naopak, vieme ich stále opakovať, a tak najmenší súčet bude mať postupnosť 1, 2, 1, …, 2 a to **11 · 1 + 11 · 2 = 33**.

Podobne vieme prísť aj na súčet najväčší, kde neustále vieme opakovať 5 a 6 – ALE POZOR – začíname na jednotke a teda súčet bude **1 + 11 · 5 + 10 · 6 = 116**.

Viacerí z vás teraz iba spočítali čísla medzi 33 a 116, vyšlo im 84 (pretože sčítavame čísla aj vrátane 33 a 116) a vyhlásili, že sa dajú, prípadne nedajú spraviť všetky súčty medzi ním. Avšak, ako si môžeme byť istí takýmto tvrdením? Poďme si to ukázať.

Rozdelíme si týchto 84 čísel do skupín a začneme skupinou čísel od 34 do 66 a postupnosťou 1, 2, 1, …, 2, ktorá má súčet 33. V tomto prípade môžeme postupne po jednej všetky dvojky v rade vymieňať za trojky (skončíme pri 44), trojky za štvorky (skončíme pri 55), štvorky za päťky (skončíme pri 66) a tak postupne dostaneme naozaj všetky čísla (môžete si to vyskúšať). Vždy teda aj dodržíme, že sa nám po sebe nebudú opakovať čísla, ktoré nevieme získať – 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4, keďže medzi nimi bude vždy jednotka a šestku nepoužijeme.

Ďalšou skupinou sú čísla 83 až 116, kde necháme základ z postupnosti so súčtom 116 – 1, 5, 6, 5, …, 5 a postupne opäť vymieňame, tentoraz päťky, za nižšie čísla, až postupne budeme mať 1 · 1 + 10 · 6 + 11 · 2. Tým, že po šestke nikdy nepôjde jednotka a meníme každé druhé číslo, máme aj vyriešené, že sa určite dajú zvládnuť.

Najzložitejšia situácia nastáva s číslami 67 až 82. Párne čísla z tejto skupiny vieme získať tak, že do postupnosti 1, 5, 1, 5, 1 …, 5 so súčtom 66 vieme namiesto jednotiek postupne dávať trojky, samozrejme okrem prvej jednotky, ktorá je nemenná. Takto sa dostaneme až na postupnosť 1, 5, 3, 5, 3, …, 5 so súčtom 86. No a nepárne čísla vieme dostať z tých párnych práve vtedy, keď v postupnosti 1, 5, 1, 5, 1 …, 5 so súčtom 66 vymeníme jednu päťku za štvorku, napríklad poslednú. Vznikne nám postupnosť 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 4 so súčtom 65 V tejto postupnosti nám postupne stačí vymieňať jednotky za trojky (okrem tej prvej) až sa dostaneme k postupnosti 1, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 1, 4, čo nám dá súčet 83, čo už máme spravené aj pri predchádzajúcej skupine a tým sme pokryli všetky čísla v skupine od 67 až 82 a zároveň aj a máme dokázané, že vieme naozaj spraviť všetky súčty medzi 33 a 116.

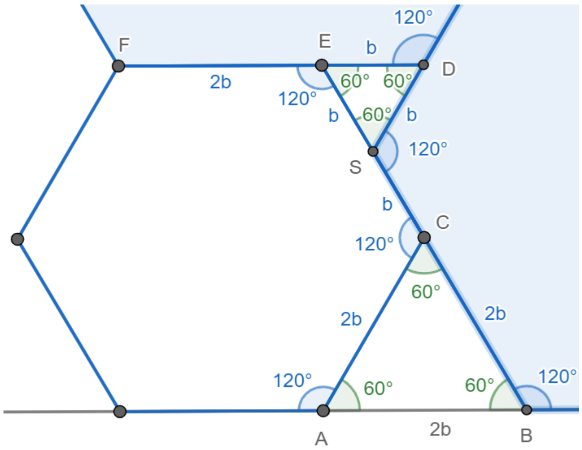
Vieme teda dosiahnuť 84 stromov, s najmenej 33 konármi a najviac 116 konármi.

***Úloha č. 4** (opravovala Vierka Glevitzká)*

Pri pohľade na obrázok v zadaní sa nám môžu zdať modré šesťuholníky rovnako veľké. V zadaní však nič také nie je napísané a obrázky v zadaniach môžu byť často nepresné. Skúsme sa teda zamyslieť, ako to v skutočnosti je. Mohlo by nám pomôcť, keď nájdeme nejaké úsečky, ktoré majú rovnakú dĺžku a od ktorých by sme sa možno mohli odraziť.

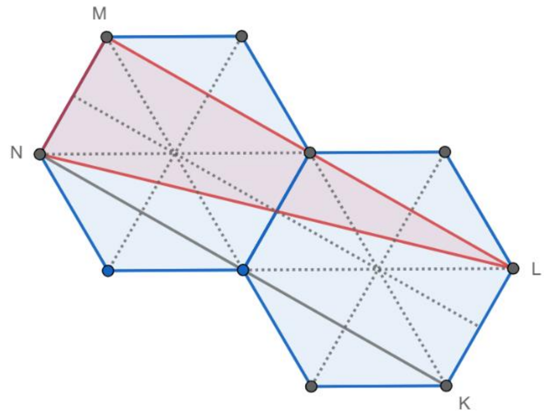
Zo zadania vieme, že všetky tri šesťuholníky sú pravidelné a bod S je v strede strany najmenšieho z nich. Uhly v pravidelnom šesťuholníku sú rovnaké a majú uhol 120°. Môžeme si všimnúť, že všetky uhly v trojuholníku ABC sú susedné k niektorému vnútornému uhlu nejakého pravidelného šesťuholníka. Všetky uhly trojuholníka ABC budú mať preto veľkosť 60° (180° − 120° = 60°). Toto platí aj pre trojuholník SDE a teda aj jeho uhly budú mať veľkosť 60°. Trojuholníky ABC a SDE sú preto rovnostranné.

Označme si dĺžku úsečky ES ako b . Ide o polovicu strany najmenšieho šesťuholníka, takže jeho strana bude mať dĺžku 2b. Trojuholníky ABC a SDE sú rovnostranné a preto budú mať všetky strany trojuholníka ABC dĺžku 2b a strany trojuholníka SDE dĺžku b. Úsečka BS bude mať dĺžku 3b, keďže je zložená z úsečiek BC (2b) a CS (b). Strany pravého modrého pravidelného šesťuholníka budú preto dlhé 3b. Úsečka DF bude mať podobne dĺžku 3b, keďže sa skladá z úsečiek DE (b) a EF (2b). Strany ľavého modrého pravidelného šesťuholníka budú preto dlhé 3b. Modré šesťuholníky sú teda rovnako veľké.



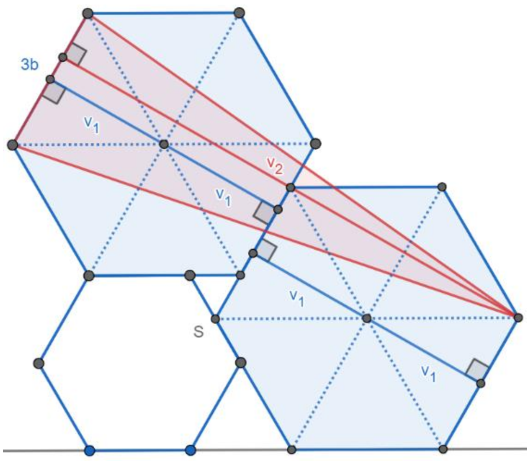
Skúsme teraz zistiť pomer obsahu opaľovacej plošiny (červený trojuholník) k obsahu napustených bazénov (modré šesťuholníky). Obsah trojuholníka počítame ako ($a \cdot v_a$) : 2, kde a je strana trojuholníka a v_a výška na túto stranu. Ďalej vieme, že protiľahlé strany pravidelného šesťuholníka sú rovnobežné. Keď teda posunieme modré šesťuholníky tak, ako na obrázku, obsah červeného trojuholníka nijako nezmeníme, keďže jeho výška na stranu MN zostane rovnaká (bod L sme posunuli po priamke rovnobežnej so stranou MN).

Šesťuholníky si môžeme rozdeliť na rovnostranné trojuholníky. Každý z nich si potom môžeme rozdeliť pomocou jeho výšky na dva rovnaké pravouhlé trojuholníky, ktoré majú rovnaké obsahy. Tieto dva modré šesťuholníky sú teda dokopy tvorené 24 malými trojuholníkmi. Môžeme si všimnúť, že trojuholník LMN tvorí polovicu obdĺžnika KLMN, ktorý obsahuje 16 spomínaných trojuholníkov. Obsah trojuholníka LMN je preto rovnaký ako obsah ôsmych malých trojuholníkov.



Pomer obsahu opaľovacej plošiny k obsahu na pustených bazénov je teda 8 : 24, čo je 1 : 3.

Ďalšie pekné riešenie spočívalo v tom, že keď šesťuholníky rozdelíme na rovnostranné trojuholníky, tak potom bude výška červeného trojuholníka 4-krát dlhšia, ako výška rovnostranných trojuholníkov, na ktoré sme šesťuholníky rozdelili. Obsah šesťuholníkov je teda rovný obsahu dvanástim rovnostranným trojuholníkom:



$$12 \cdot \frac{3b \cdot v_1}{2} = 18b \cdot v_1$$

Obsah červeného trojuholníka:

$$\frac{3b \cdot v_2}{2} = \frac{3b \cdot (4 \cdot v_1)}{2} = 2 \cdot 3b \cdot v_1 = 6b \cdot v_1$$

Pomer nám teda znova vyjde 1 : 3.

$$\frac{6b \cdot v_1}{18b \cdot v_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$