SEZAMKO 2018/2019, Vzorové riešenia 1. série letnej časti

Milí riešitelia,
opäť nám prišla kopa zaujímavých riešení. Athenu, Porthosa a Appetitosa vaša pomoc veľmi potešila. Netreba však nič nechať na náhodu a treba naďalej trénovať svoje matematické svaly. K tomu vám isto dopomôžu tieto vzorové riešenia, hlavne ak si ich poriadne prečítate.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMKOVI nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú organizátori SEZAMKA.

Príklad č. 1 (opravovala Anežka Pajúnková)

Ak prvý do klubu vošiel jasnovidec poctivec, tak druhý jasnovidec bude klamár, tretí bude poctivec a takto sa to bude striedať. Čiže poctivcov bude 5 a klamárov bude tiež 5.

Ak do klubu vojde prvý klamár, druhý bude poctivec, tretí klamár a tiež sa to takto bude striedať. Klamárov aj poctivcov bude 5.

Kde sa práve nachádzajú sa Athena a Porthos dozvedia tak, že položia niektorému jasnovidcovi otázku, na ktorú poznajú odpoveď. Napríklad najskôr naučia jasnovidcov, že 2 + 2 = 4. Potom sa spýtajú niektorého jasnovidca (napríklad toho, ktorý vošiel prvý), koľko je 2 + 2. Ak odpovie 4, tak je poctivec, a Athena a Porthos sa ho môžu spýtať, kde sa nachádzajú. Ak odpovie niečo iné, tak je klamár. To však znamená, že jasnovidec, ktorý vošiel hneď po ňom (v našom prípade ten, čo vošiel druhý), je poctivec. Takže ak prvý jasnovidec je klamár, tak im pravdivo odpovie druhý jasnovidec.

Príklad č. 2 (opravoval Ondro Belan)

V príklade máme zrátať dve 4-ciferné čísla, ktorých výsledok je 5-ciferné číslo a každá cifra je nahradená nejakým písmenom. Hneď na prvý pohľad si môžeme všimnúť, že na mieste jednotiek sčítaním **A** + **A** dostaneme cifru **E**. Ak je cifra **A** štyri alebo menej, tak dostaneme **A** + **A** = **E**. Ak je cifra **A** viac ako štyri, tak dostaneme **A** + **A** = 1**E** = 10 + **E**. V prvom prípade dostaneme **E** = 2 · **A**, čo znamená, že **E** je párna cifra. V druhom prípade dostaneme **E** = 2 · **A** – 10. Rozdiel dvoch párnych čísel je vždy párny, takže aj v tomto prípade je **E** párna cifra. Zistili sme teda, že **E** bude vždy párna cifra.

Pozrime sa teraz na stĺpec na mieste stoviek. Ak by **A** bolo väčšie ako **4**, tak súčet **A** + **A** bude aspoň 10. Takže sa nám prenesie 1, a na mieste tisícok dostaneme rovnosť **P** + **P** + 1 = **RE**. Na ľavej strane máme nepárne číslo (2 · **P**) + 1, no na pravej strane je párne číslo **RE** (keďže na mieste jednotiek má párnu cifru **E**). Keďže párne číslo sa nikdy nerovná nepárnemu, tak cifra **A** musí byť medzi 0 až 4. Z toho navyše vieme, že **E** = 2 · **A**.

Ďalej si všimnime, že na mieste stoviek pod dvoma ciframi **A** nie je **E** (tak ako na mieste jednotiek) ale **Z**. V sčítaní dokážeme súčet v stĺpci zmeniť len prirátaním čísla, ktoré sme preniesli z predchádzajúceho stĺpca. Keďže na mieste desiatok sčítavame dve cifry, tak nám môže zostať najviac 1 (zamyslite sa prečo). Ak by nám z predchádzajúceho stĺpca nezostalo nič, tak musí platiť **Z** = 2 · **A**. No potom by **Z** a **E** boli rovnaké cifry, čo nevyhovuje zadaniu. Z predchádzajúceho stĺpca nám teda musí zostať 1. Navyše **A** je najviac 4, takže **A** + **A** + 1 je najviac 9. To znamená, že **Z** = 2 · **A** + 1, a navyše do ďalšieho sčítania (na mieste tisícok) nič neprenesieme.

Súčet dvoch štvorciferných čísel môže byť najviac 9999 + 9999 = 19998, takže **R** musí byť 1. Keďže sme do sčítania na mieste tisícok nič nepreniesli, tak vieme, že **P** + **P** = 1**E** = 10 + **E**. Vieme, že **E** = 2 · **A**, takže túto rovnosť vieme prepísať ako **P** + **P** = 10 + (2 · **A**). Keď túto rovnosť celú vydelíme dvoma, tak zistíme **P** = **A** + **5**.

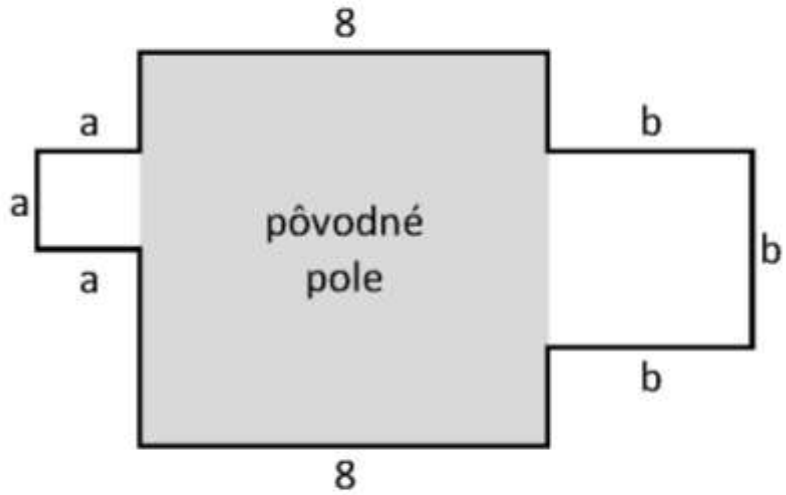
Nakoniec sa ešte pozrime na miesto desiatok. Vieme, že zo sčítania na mieste jednotiek sme nič nepreniesli. Taktiež vieme, že do sčítania na mieste stoviek musíme preniesť 1. Preto musí platiť, že **T** + **P** = 1**N** = 10 + **N**.

Teraz začnime skúšať za **A** dosadiť všetky cifry od 0 do 4. Ak **A** = 0, tak potom **E** = 2 · **A** = 0, no dve rôzne písmená sa musia rovnať dvom rôznym cifrám. Takže **A** sa nerovná 0. Tiež sa nemôže rovnať 1, pretože vieme, že **R** = 1. Ak **A** = 2, potom vieme dopočítať **E** = 4, **Z** = 5 a **P** = 7. nepoužité nám zostali už len cifry 0, 3, 6, 8 a 9. Musíme nájsť dve cifry pre ktoré platí **T** + 7 = 10 + **N**. Spomedzi ešte nevyužitých cifier to spĺňajú dvojice **N** = 0 a **T** = 3, **N** = 3 a **T** = 6 a nakoniec **N** = 6 a **T** = 9. Ak **A** = 3, potom **E** = 6, **Z** = 7 a **P** = 8. Nepoužité nám zostali už len cifry 0, 2, 4, 5 a 9. Musíme nájsť dve cifry pre ktoré platí **T** + 7 = 10 + **N**. Spomedzi ešte nevyužitých cifier to spĺňajú dvojice **N** = 0 a **T** = 2, **N** = 2 a **T** = 4. Ak **A** = 4, tak by **P** aj **Z** museli byť 9, čo nevyhovuje zadaniu. Celkovo sme teda našli 5 riešení:

R = 1, **A** = 2, **E** = 4, **Z** = 5, **P** = 7, **N** = 0 a **T** = 3,
R = 1, **A** = 2, **E** = 4, **Z** = 5, **P** = 7, **N** = 3 a **T** = 6,
R = 1, **A** = 2, **E** = 4, **Z** = 5, **P** = 7, **N** = 6 a **T** = 9,
R = 1, **A** = 3, **E** = 6, **Z** = 7, **P** = 8, **N** = 0 a **T** = 2,
R = 1, **A** = 3, **E** = 6, **Z** = 7, **P** = 8, **N** = 2 a **T** = 4.

Príklad č. 3 (opravoval Adam Kňaze)

Bača mal na začiatku štvorcový pozemok s obvodom 32 metrov. Keďže štvorec má všetky štyri strany rovnako dlhé, vieme si vypočítať dĺžku strany pôvodného pozemku ako 32 : 4 = 8 metrov. Po pridaní prílepkov tak, ako je to popísané v zadaní, sa obvod jeho pozemku, ktorý bolo treba oplotiť, zväčšil na 56 metrov. Keď si bačov nový košiar nakreslíme, zistíme z čoho presne sa táto dĺžka skladá.



Vidíme, že sú do nej zarátané dve strany z pôvodného poľa tak ako boli predtým (horná a dolná), čo je dokopy 16 metrov. Pomenujme si dĺžku strany ľavého prílepku **a** metrov, a dĺžku strany pravého prílepku **b** metrov. Pôvodná ľavá strana bačovho poľa mala dĺžku 8 metrov, no teraz z nej **a** metrov chýba. Pribudli však 3 nové strany dĺžky **a**, čo je dokopy 8 – **a** + **a** + **a** + **a** = 8 + (2 · **a**) metrov. Na pravej strane sa deje to isté a dĺžka tam bude 8 – **b** + **b** + **b** + **b** = 8 + (2 · **b**) metrov.

Nový obvod bačovho poľa aj s prílepkami si teda vieme vyjadriť ako súčet jednotlivých častí ktoré sme tu rozobrali, teda 56 = 16 + 8 + (2 · **a**) + 8 + (2 · **b**) = 32 + (2 · **a**) + (2 · **b**). Rovnicu ktorú sme dostali môžeme ešte zjednodušiť tým, že od oboch strán odčítame 32, a následne obe strany vydelíme dvomi:

56 = 32 + (2 · **a**) + (2 · **b**)
24 = (2 · **a**) + (2 · **b**)
12 = **a** + **b**

A už nám len stačí hľadať riešenia tejto rovničky tak, aby platilo, že žiaden prílepok nebude väčší ako pôvodné pole. Tomu vyhovujú riešenia **a** = 5, **b** = 7 alebo **a** = 6, **b** = 6. Niektorí z vás časť zadania, ktorá spomína prílepok ako „menší", rozumeli ako „menší alebo rovnaký". Vtedy vyhovuje aj riešenie **a** = 4, **b** = 8. No a niektorým slovíčko „menší" ušlo kompletne a hľadali aj riešenia s prílepkami väčšími ako pôvodné pole. V takom prípade si však treba dať pozor na to, že rovnica, ktorú sme si tu odvodili, už nebude platiť (môžete sa zamyslieť prečo je to tak), ale ani obrázok sa už nebude dať nakresliť.

***Príklad č. 4** (opravovala Denisa Múthová)*

Našou úlohou je zistiť, akými písmenkami boli záhradné stanoviská našich troch rytierov označené. Vieme, že stanoviská sú označené písmenkami **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I** a **J** a tiež poznáme cesty rytierov:

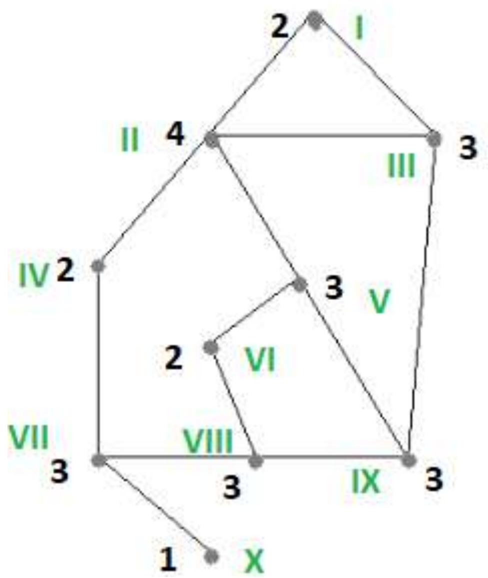
Athena: **G**, **B**, **J**, **F**, **I**, **H**
Porthos: **E**, **H**, **G**, **D**, **A**
Appetitos: **F**, **A**, **B**, **J**, **C**, **F**

Pozrime sa na trasy a skúsme zistiť, koľko susedov má ktoré písmenko. Alebo, inak povedané, koľko cestičiek vedie z jednotlivých stanovísk.

Písmenko **A** susedí s **B**, **D** a **F**. Písmenko **B** susedí s **A**, **G** a **J**. Písmenko **C** s **J**, **F**. Písmenko **D** s **A**, **G**. Písmenko **E** s **H**. Písmenko **F** s **A**, **C**, **I** a **J**. Písmenko **G** s **B**, **D** a **H**. Písmenko **H** susedí s **E**, **G**, **I**. Písmenko **I** susedí s **F**, **H** a písmenko **J** susedí s **B**, **C** a **F**.

Po sčítaní susedov pre jednotlivé písmenká vieme povedať, že písmenko **A** má troch susedov, **B** má troch susedov, **C** má dvoch susedov, **D** má dvoch susedov, **E** má jedného suseda, **F** má štyroch susedov, **G** má troch susedov, **H** má troch susedov, **I** má dvoch susedov a nakoniec **J** má troch susedov.

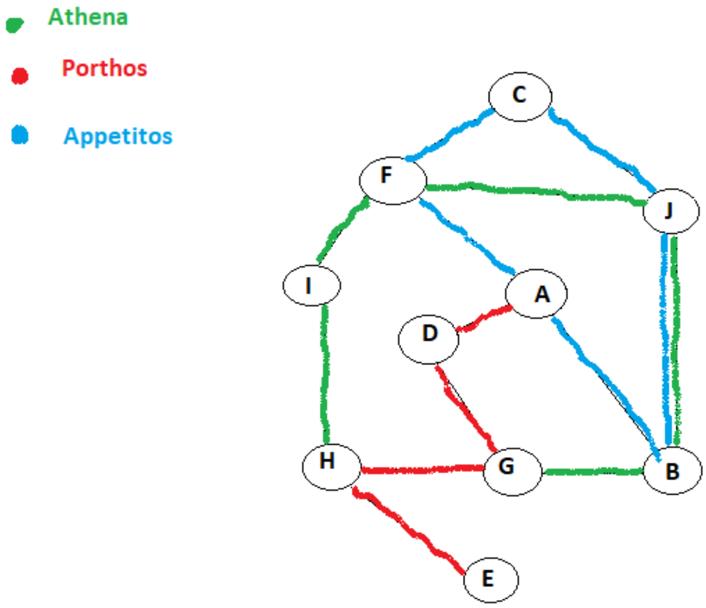
Teraz sa pozrime na záhradu so stanoviskami a pripíšme ku každému stanovisku počet cestičiek, ktoré z neho vedú. Tiež si označme stanoviská rímskymi číslicami (na obrázku zelenou farbou), aby sme sa ne neskôr vedeli odkazovať.



A teraz sa môžeme pustiť po priraďovania písmeniek ku stanoviskám. Jediné stanovisko, z ktorého vedie len jedna cestička je stanovisko **E**. Takže z obrázka vidíme, že písmenku **E** priradíme miesto ***X*** (jediné stanovisko na obrázku, z ktorého ide len jedna cestička). Podobne písmenko **F** má štyroch susedov a vieme mu priradiť jeho miesto ***II***.

Písmenko **E** má jedného suseda **H**, takže **H** bude na mieste ***VII***. S **H** susedia okrem **E** aj písmenká **G** a **I**. Vieme, že písmenko **G** má troch susedov, zatiaľ čo písmenko **I** má dvoch susedov. Takže písmenko **G** má pozíciu ***VIII*** a písmenko **I** má pozíciu ***IV***. Druhého suseda písmenka **I** už poznáme, je to písmenko **F**. Písmenko **F** susedí aj s **A**, **C** a **J**, ktoré majú troch, dvoch a troch susedov. Jediné stanovisko, ktoré susedí s **F** a má práve dvoch susedov, je na mieste ***I***. Takže **C** je na mieste ***I***. Písmenko **C** susedí s písmenkami **F** a **J**, a teda písmenko **J** je na mieste ***III***. Posledný sused písmenka **F** je písmenko **A**. Pre **A** nám teda ostáva miesto ***V***.

Písmenko **J** má následne už len jedného voľného suseda, a to písmenko **B**. Preto písmenko **B** leží na mieste ***IX***. Ostalo nám už len písmenko **D**, ktoré ja bude na poslednom voľnom ***VI***. Už nám len ostáva zakresliť si na plánik, ako behali rytieri (viď obrázok) a sme hotoví.


Athena
Porthos
Appetitos
C
F
J
I
A
D
H
G
B
E