JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2018/19, vzorové riešenia 1. letnej série

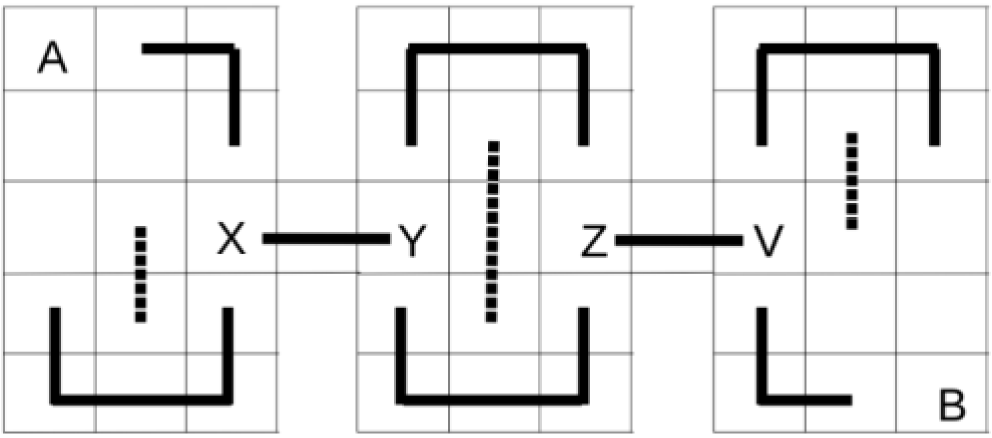
Milí riešitelia,
práve sa k vám dostali zadania druhej letnej série tohtoročného SEZAMu. Reno, Magdaléna, Jacob, Diana a Arcus sú vďační za vašu pomoc s problémami z prvej série a veria, že sa úspešne popasujete aj s úlohami z druhej série. Ak si chcete, predtým než sa do nich pustíte, ponamáhať svoje matematické svaly, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Kika Kovalčíková)

Toto vzorové riešenie je vo veľkej miere inšpirované riešením Evky Ondovčíkovej a Mariána Kurčinu. V prvom rade si bolo treba všimnúť, že komnaty vieme rozdeliť na tri časti, zodpovedajúce trom obdĺžnikom 3x5. Najprv treba prejsť cez všetky komnaty v prvej časti, potom celú druhú časť, a nakoniec celú tretiu časť. Každú časť prešetríme zvlášť a zistíme, koľkými spôsobmi ju vieme prejsť.

Ešte predtým, než každú časť preskúmame zvlášť, poďme sa pozrieť na to, čo majú spoločné. Napríklad si môžeme všimnúť, že prvá a posledná časť sú rovnaké, len sú otočené. Preto bude v obidvoch rovnaký počet možností, ako danú časť prejsť. Ďalej platí, že cestička cez rohové komnaty môže viesť len jedným spôsobom, keďže tieto rohové komnaty majú len dvoch susedov. Na obrázku je táto cestička znázornená plnou čiarou. Ešte jedna vec, ktorou si môžeme byť istí, je spojenie komnát v strede prvej, druhej, aj tretej časti – tu pomôže k vysvetleniu pohľad na obrázok. Cestička cez rohové komnaty je už veľmi presne daná, a ak nechceme vytvoriť v strede hociktorej časti slučku, musíme spojiť dve alebo tri susedné komnaty v strede. Na obrázku sú tieto kúsky cestičky znázornené bodkovanou čiarou.

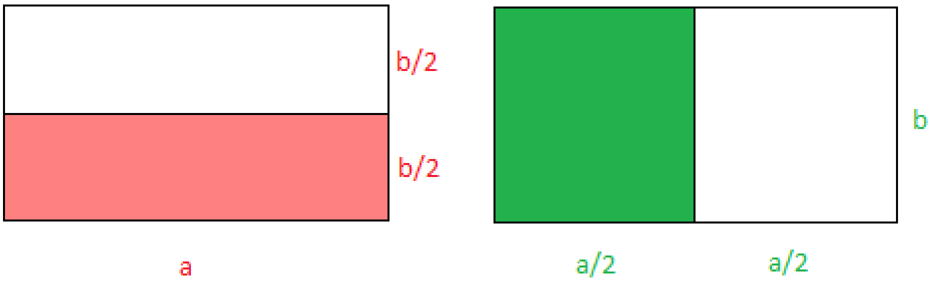


Teraz už len musíme pospájať tieto kúsky cestičky, aby sme pri tom na žiadnu možnosť nezabudli. V prvej časti musíme začať v komnate A a skončiť v komnate označenej ako X. Začnime ale odzadu, v komnate X, a poďme hľadať spôsoby, ako sa dostať do A. Z komnaty X môžeme odísť troma rôznymi spôsobmi: nahor, doľava alebo nadol. Každá jedna z týchto možností skrýva inú cestu do komnaty A, ktorá už je jednoznačne daná týmto prvým krokom. Takže máme 3 možnosti, ako prejsť prvú, ľavú časť komnát. Zároveň podobné tri možnosti máme aj na prejdenie poslednej, pravej časti komnát. Poďme sa ešte pozrieť na strednú časť komnát. Vychádzame z komnaty Y a ideme do komnaty Z. Odísť z komnaty Y môžeme dvoma možnosťami, nahor alebo nadol. Každá z týchto možností vyústi do cestičky. Takže pre strednú časť máme 2 možnosti, ako sa dá prejsť.

Čo teraz s týmito troma číslami? Hociktorá cestička v časti s komnatou A sa dá skombinovať s hociktorou cestičkou v strednej časti, a aj s hociktorou cestičkou v poslednej časti. Preto tieto čísla vynásobíme, a ***dostaneme*** $2 \cdot 3 \cdot 2$ = ***18 možností, ako sa dá prejsť z komnaty A do komnaty B, ak chceme každou komnatou prejsť práve raz.***

***Príklad č. 2** (opravovala Maťa Kudelčíková)*

Na stole máme položené dva rovnaké kusy obdĺžnikovej látky so stranami *a, b*, ktoré rozstrihneme takto:



Keďže sme ich rozstrihli na polovicu, strany nových obdĺžnikov, ktoré vznikli z prvého kusu látky (naľavo) budú mať veľkosti *a*, *b/2* , a strany nových obdĺžnikov ktoré vznikli z druhej látky (napravo) budú mať veľkosti *a/2, b*. Ďalej vieme, že každý malý obdĺžnik z prvej látky má obvod 140 cm. Obvod jedného z nich, vyznačíme si ho červenou farbou, vieme vypočítať podľa obrázka ako $o_1 = 2 \cdot (a + b/2)$. Máme teda rovnicu, ktorú si vieme trochu upraviť:

$$140 = 2 \cdot (a + b/2),$$
$$2a + b = 140.$$

Poďme sa pozrieť, čo vieme o druhom kuse látky. Túto sme rozstrihli taktiež na polovicu, no kolmo na predošlý strih. Obdĺžniky, ktoré z neho vznikli majú každý obvod 100cm. Spočítame teda obvod zeleného obdĺžnika:

$$o_2 = 2 \cdot (a/2 + b),$$
$$100 = 2 \cdot (a/2 + b),$$
$$a + 2b = 100.$$

Dostali sme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych, z ktorej vieme vypočítať veľkosť strán *a*, *b*, čiže veľkosť strán pôvodných obdĺžnikov. Vyriešime ju:

$$2a + b = 140$$
$$a + 2b = 100$$

Vyjadríme si z prvej rovnice *b* pomocou *a* a dosadíme ho do druhej rovnice.

$$b = 140 - 2a$$
$$a + 2 \cdot (140 - 2a) = 100$$
$$a + 280 - 4a = 100$$
$$-3a = -180$$
$$a = 60$$

Vypočítali sme stranu *a*, teraz ju môžeme dosadiť do vyjadrenia strany *b* a dostaneme:

$$b = 140 - 2a = 140 - 2 \cdot 60 = 140 - 120 = 20.$$

Pôvodný obdĺžnik mal teda strany s dĺžkami $a = 60$ cm, $b = 20$cm. Jeho obvod vypočítame už jednoducho: $o = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (60 + 20) = 2 \cdot 80 = 160$.

Pôvodný obdĺžnik mal obvod 160cm.

Príklad č. 3 (*opravovala Baša Marečáková*)

Väčšina z vás k riešeniu pristupovala dvomi spôsobmi. Buď ste našli alebo vymysleli pravidlo deliteľnosti pre číslo 13, ktoré však bolo treba aj zdôvodniť, alebo ste hľadali nejakú pravidelnosť postupným delením čísel zložených z jednotiek.

Spoločne si prejdeme práve ten druhý spôsob, teda sa poďme pozrieť, ako funguje delenie jednotiek číslom 13.

1 : 13 = 0 zv. 1

11 : 13 = 0 zv. 11

111 : 13 = 8 zv. 7

1 111 : 13 = 85 zv. 7

11 111 : 13 = 854 zv. 6

111 111 : 13 = 8547 zv. 0

1 111 111 : 13 = 85470 zv. 1

11 111 111 : 13 = 854700 zv. 11

Naznačuje sa nám tam nejaká postupnosť. Zároveň si môžeme všimnúť, že číslo 111 111 je deliteľné 13, teda má zvyšok 0. Čo sa stane, ak toto číslo vynásobíme 10? Dostaneme 1 111 110, ktoré nám takisto dá zvyšok 0 po delení 13. Ak by sme ho vynásobili číslom 100, tak rovnako dostaneme zvyšok 0 po vydelení číslom 13. Vieme ho vynásobiť aj 1 000 000 a stále budeme mať číslo, ktoré nám dáva zvyšok 0. Skúste si postupne na papier vydeliť takéto číslo z jednotiek a núl, a hlavne si všimnite, čo nám pridávanie 0 na konci robí s výsledkom.

Avšak my potrebujeme mať číslo zložené len z jednotiek a nemajú v ňom byť nuly. Môžeme skúsiť spraviť nasledovné:

(111 111 000 000 + 111 111) : 13 = 111 111 111 111 : 13 = 8 547 008 547 zv. 0

Ukázali sme, že číslo s 12 jednotkami je deliteľné číslom 13. Lebo prvá časť čísla zložená z jednotiek a núl je deliteľná 13 a pripočítavaná časť je tiež deliteľná 13. Rovnako môžeme tento postup opakovať a pridáme k nemu ďalších 6 jednotiek. To znamená, že ak budeme mať 2016 jednotiek (2016 je deliteľné 6 so zvyškom 0), tak o tomto čísle vieme povedať, že je deliteľné 13. Avšak naše číslo má mať 2019 jednotiek.

Čiže ho vieme získať takto: 111 111 ... 111 000 + 111 = (2019 jednotiek v čísle). Prvá časť súčtu je deliteľná číslom 13 so zvyškom 0. Druhá časť súčtu, číslo 111, je deliteľné číslom 13 so zvyškom 7.

Číslo zložené z 2019 jednotiek dáva po vydelení číslom 13 zvyšok 7.

Príklad č. 4 (*opravoval Kubo Kaloč****)***

V zadaní bolo povedané, že naše zaklínadlo má mať 180 priesečníkov a pritom čo najmenší rád. To dosiahnem tak, že z tetív vždy vytvorím čo najväčší počet priesečníkov a teda budem používať najmenší možný počet tetív. Ako to však spraviť? Za prvé budeme chcieť aby sa každá tetiva preťala so všetkými s ktorými je to možné, teda so všetkými nerovnobežnými tetivami. Za druhé budeme požadovať aby sa žiadne tri tetivy nepretínali v tom istom bode, pretože tá tretia mohla vytvoriť nové priesečníky.

Aby sme si boli istí, že naše dve požiadavky na tetivy neporušíme, tak si v trojuholníku určíme nové tri body P, Q, R. Bod P bude ležať v strede BC, bod Q bude ležať v strede CA a bod R bude ležať v strede AB. Všimnime si, že keď budeme tetivy kresliť vždy tak, aby boli vždy len na jednej strane od stredových bodov, a to tej, ktorá je bližšie k strane s ktorou sú tetivy rovnobežné, tak si zaručíme, že bude platiť prvá požiadavka. Pri kreslení už stačí myslieť na tú druhú a nevytvárať priesečníky s tromi tetivami.

Keď mám toto všetko ujasnené zostáva zistiť, koľko tetív potrebujem a aký má byť rád kúzla. Poďme si postupne rozobrať ako sa vytvárajú priesečníky. Predpokladajme, že máme kúzlo rádu R. Keď nakreslím všetkých R tetív rovnobežných s jednou stranou, nevytvoria sa mi žiadne priesečníky (čo je v poriadku, keďže sú všetky tetivy rovnobežné). Teraz doplňme R tetív rovnobežných s druhou stranou. Tie sa medzi sebou tiež nepretnú, ale každá z nich sa pretne s všetkými R tetivami, ktoré sme nakreslili ako prvé. Pridali sme teda R tetív kde sa každá pretne s R inými tetivami, to je dokopy $R \cdot R = R^2$ priesečníkov. Poďme pridať aj R tetív rovnobežných s treťou stranou. Každá sa najprv preťala s R tetivami, ktoré som nakreslil v prvom kroku, takže dostanem znova $R \cdot R = R^2$ priesečníkov a potom sa každá preťala aj s R tetivami, ktoré som nakreslil v druhom kroku, takže znova sa vytvorí $R \cdot R = R^2$ priesečníkov. Dokopy keď to spočítame máme teda $3 \cdot R^2$ priesečníkov pre kúzlo rádu R. Keďže sme kreslili tak, aby nám vznikol vždy čo najväčší počet priesečníkov, môžeme povedať, že pre kúzlo rádu R vieme vytvoriť najviac $3 \cdot R^2$ priesečníkov.

Teraz už len skúsime dosadiť zopár čísiel a dostaneme, že pre kúzlo siedmeho rádu vieme vytvoriť najviac $3 \cdot 72 = 3 \cdot 49 = 147$ priesečníkov, čo je málo. Pre kúzlo ôsmeho rádu vieme vytvoriť $3 \cdot 82 = 3 \cdot 64 = 192$ priesečníkov, čo je síce veľa, ale pamätajme, že toto je maximálny počet aký vieme dosiahnuť. Keď už vieme, že hľadáme kúzlo ôsmeho rádu, tak nám stačí porušiť jednu z dvoch podmienok kreslenia aby sme znížili počet priesečníkov z 192 na 180. To môžeme spraviť napríklad tak, ako na obrázku.

Kúzlo bolo teda ôsmeho rádu a môže vyzerať napríklad tak ako na obrázku.