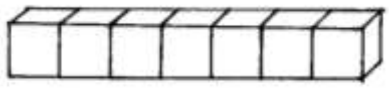
SEZAMKO 2018/2019, Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Milí riešitelia,
ani sme sa nenazdali a už s vami musíme pomaly lúčiť. Opravili sme totiž poslednú sériu SEZAMKa v tomto školskom roku. Len pomaly sa lúčime preto, lebo s tými, ktorí usilovne rátali, sa ešte stretneme v máji na sústredení v Rajeckej Lesnej.

Laura a Marek vám všetkým veľmi pekne ďakujú za všetky matematické problémy, s ktorými ste im pomohli. V septembri k vám (ak ste nám v hlavičkách písali správnu adresu) zavítajú noví rozprávkoví hrdinovia. Nechajte sa prekvapiť, kto to bude tentoraz. Pokiaľ ste už šiestaci alebo primania a SEZAMKa budúci rok podľa pravidiel nebudete môcť riešiť, nesmúťte. Väčší brat SEZAMKa – volá sa SEZAM, na Vás určite bude myslieť a pošle vám svoje zadania. Aby ste budúci rok patrili k tým najšikovnejším, nezabudnite si prečítať aj tieto vzorové riešenia…
Úspešný koniec školského roka a pekné prázdniny vám želajú všetci vedúci SEZAMKA

Príklad č. 1 (**opravovali Betka Bohiniková a Eliška Kaločová**)

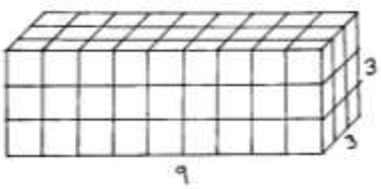
Athena nafarbila povrch veľkého kvádra a následne ho rozrezala rovnobežne s jeho stenami. Chceme zistiť, koľko menších kociek má nafarbené práve dve svoje steny. Vieme, že práve 7 zo vzniknutých menších kociek nemá nafarbenú ani jednu svoju stenu. To znamená, že týchto sedem kociek tvorí vnútri pôvodného kvádra menší kváder, ktorý je obalený vonkajšími

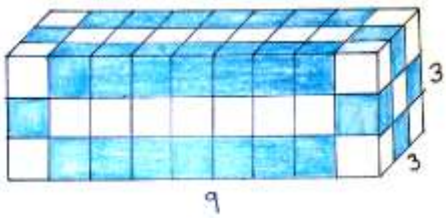


zafarbenými kockami. Keďže 7 sa dá deliť iba číslami 1 a 7, tak z týchto siedmich kociek vieme kváder postaviť len jediným spôsobom. A to tak, že ich uložíme vedľa seba do jedného radu.

Tento vnútorný kváder obalíme práve jednou vrstvou kociek z každej strany a dostaneme pôvodný kváder. Jeho rozmery sú 3×3×9.

Všimnime si, že ak by sme pridali viac vrstiev, vznikli by ďalšie kocky, ktoré nemajú zafarbenú ani jednu stranu. To znamená, že pôvodný kváder má len jedno riešenie. Na obrázku sú vyfarbené kocky, ktoré majú zafarbené práve dve steny:



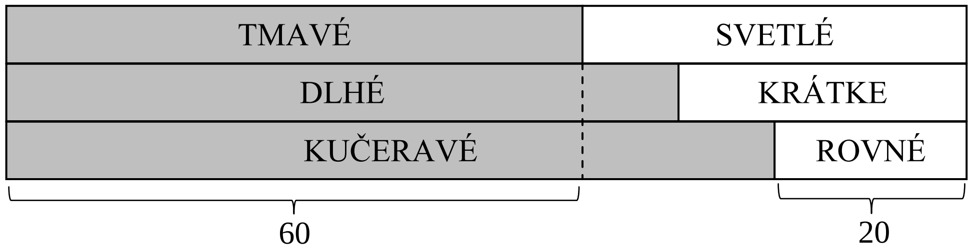


Na každej hrane dlhej deväť kociek je sedem kociek s nafarbenými dvomi stranami. Takéto hrany sú štyri. Teda dokopy $7 \cdot 4 = 28$ kociek. Na každej hrane dlhej 3 kocky je jedna kocka s dvomi nafarbenými stenami. Takýchto hrán je 8, teda máme $8 \cdot 1 = 8$ kociek.

Dokopy teda máme 28 + 8 = 36 kociek s dvomi farebnými stenami.

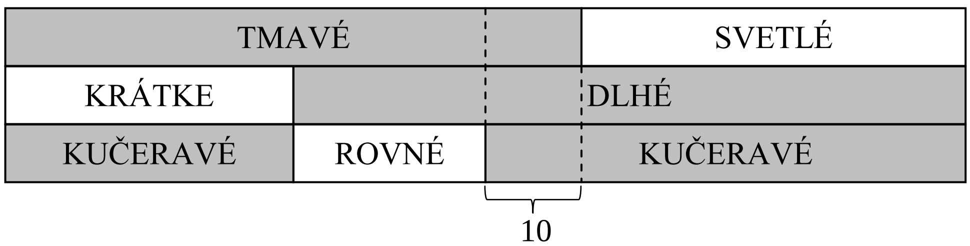
***Príklad č. 2** (opravoval Peťo Novotný)*

Z trojice vlastností tmavé/dlhé/kučeravé je najmenší počet ľudí s tmavými vlasmi – 60 obyvateľov. Určite teda nemôže byť viac ako 60 Carcassonnčanov, ktorí majú tmavé dlhé kučeravé vlasy. Pritom 60 ich byť môže – stačí, ak všetci tmavovlasí budú mať aj dlhé kučeravé vlasy, ako ukazuje napr. schéma:



Podobne z trojice vlastností svetlé/krátke/rovné je najmenej tých s rovnými vlasmi – 20 obyvateľov, preto nemôže byť viac ako 20 Carcassonnčanov, ktorí majú svetlé krátke rovné vlasy. Pritom 20 ich byť môže – stačí, ak všetci rovnovlasí budú mať aj krátke svetlé vlasy: Príkladom takého rozloženia vlasov je zhodou okolností tá istá schéma ako v predošlom prípade zobrazená vyššie.

Pre zistenie minimálneho počtu tmavo-dlho-kučeravovlasých skúmajme najskôr, koľko najmenej ľudí má tmavé dlhé vlasy. Spomedzi 70 dlhovlasých má maximálne 40 obyvateľov svetlé vlasy (lebo viac svetlovlasých nie je). Preto aspoň 30 dlhovlasých má tmavé vlasy. Zvyšných (čo takúto kombináciu vlasov nemajú) je teda maximálne 70. Keďže kučeravých je až 80, aspoň 10 z nich musí byť medzi spomínanými 30-timi s dlhými tmavými vlasmi. To je teda hľadaný minimálny počet. Ľahko možno zostaviť schému, kde tento počet je naozaj len 10:



Predošlá schéma je zároveň príkladom, že nemusí existovať žiadny človek so svetlými krátkymi rovnými vlasmi. V tomto prípade je teda minimálny počet 0.

Carcassonnčanov majúcich tmavé dlhé kučeravé vlasy môže byť najviac 60 a najmenej 10. Tých so svetlými krátkymi rovnými vlasmi môže byť najviac 20 a najmenej 0.

Príklad č. 3 *(opravovali Lenka a Miro Hudecoví)*

Najskôr potrebujeme zistiť, koľko strán môže mať kniha, ktorú Athena a Appetitos čítajú. Vieme, že Athena začala knihu čítať v pondelok. Prvý deň prečítala 10 nových strán, každý ďalší pracovný deň už len 8 (keďže 2 strany opakovala). V sobotu a v nedeľu prečítala 18 nových strán. Celkovo prečítala $10 + 14 \cdot 8 + 5 \cdot 18 + S = 212 + S$ strán. Keďže v nedeľu prečítala aspoň jednu novú stranu, tak $1 \leq S \leq 18$. Z toho vyplýva, že kniha má aspoň 213 a najviac 230 strán. $(212 + 1 = 213; 212 + 18 = 230)$

Ak by Appetitos začal čítať knihu v ten istý pondelok ako Athena, prečítal by za 3 týždne $10 + 14 \cdot 9 + 5 \cdot 19 + S = 231 + D$ strán, kde $1 \leq D \leq 19$. Takže by vedel prečítať 232 až 250 strán. 232 je však viac, ako Athenino maximálne množstvo strán, preto Appetitos nemôže začať čítať v pondelok.

Ak by Appetitos začal čítať:

v utorok, prečítal by 223 - 241 strán (o 1 pracovný deň menej, takže o 9 strán menej), tým pádom môže v poslednú nedeľu prečítať 1 - 7 strán, a teda naozaj dočíta v ten istý deň ako Athena,

v stredu, prečítal by 214 - 232 strán, teda v nedeľu 1 - 16 strán,

vo štvrtok, prečítal by 205 - 223 strán, teda v nedeľu 8 - 19 strán,

v piatok, prečítal by 196 - 214 strán, teda v nedeľu 17 - 19 strán,

v sobotu, prečítal by 187 - 205 strán, čo je už vždy menej, ako minimálny počet strán 213, ktoré má kniha. Takže v sobotu začať čítať už nemôže.

Appetitos môže začať knihu čítať v utorok, stredu, štvrtok alebo piatok prvého týždňa, aby ju dočítal v ten istý deň ako Athena v závislosti od toho, koľko strán má kniha (čo vie zistiť, keďže ju drží v rukách).

Poznámka k riešeniu:

Niektorí ste uvažovali, že v nedeľu Athena prečítala aspoň 2 strany, keďže v zadaní bolo použité množné číslo. Tentokrát sme to uznali. V matematike je však bežné, že o neznámej hodnote hovoríme v množnom čísle, aj keď by to mohla byť hodnota 1.

***Príklad č. 4** (opravovala Anežka Pajúnková)*

Najprv si treba uvedomiť, že keď výrobcovia váh zabudnú do jednej z váh namontovať dôležitú súčiastku, tak táto váha bude vážiť menej ako váhy, ktoré túto súčiastku majú namontovanú. Ďalej si treba uvedomiť, že keď váha bez súčiastky váži úplne náhodne, znamená to, že môže nastať aj prípad, kedy odváži správne.

Čo sa môže stať pri prvom vážení? Prvá možnosť je, že nastane rovnováha. Ak by sme vážili správnou váhou, tak na miskách musí byť jedna správna váha a jedna ľahšia, chybná váha. Správna váha nám v takomto prípade určite neukáže rovnováhu. Ak teda nastane rovnováha, tak váha ktorou vážime musí byť chybná. V tomto prípade nám teda stačí jedno váženie.

Čo ak pri prvom vážení bude jedna z váh ťažšia? V takomto prípade nevieme z určitosťou povedať, ktorá z váh je chybná. Buď sme vážili chybnou váhou, ktorá nám (chybne) ukázala, že jedna zo správnych váh je ťažšia. Alebo sme vážili správnou váhou, ktorá nám (správne) ukázala, že správna váha je ťažšia ako chybná váha. Všimnime si, že v oboch prípadoch je váha, ktorá je ťažšia, určite správna. Po prvom vážení teda nevieme zistiť, ktorá z váh je chybná, no objavíme jednu zo správnych váh. Na druhé váženie použijeme túto správnu váhu. Keďže je správna, tak ľahšia z vážených váh (pri druhom vážení) je určite chybná.

Keďže nemáme záruku, že pri prvom vážení nastane rovnováha, tak nám jedno váženie nemusí stačiť. No druhým vážením už určite odhalíme chybnú váhu.

Na objavenie chybnej váhy Porthosovi určite stačia dve váženia.