SEZAM, školský rok 2019/20, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
práve sa k vám dostali zadania druhej letnej série tohtoročného SEZAMu. Lucy, Anke, Gallo a Pierre sú vďační za vašu pomoc s problémami z prvej série a veria, že sa úspešne popasujete aj s úlohami z druhej série. Ak si chcete, predtým než sa do nich pustíte, ponamáhať svoje matematické svaly, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Prvá séria letnej časti SEZAMu už je za nami, no do súťaže sa dá stále zapojiť počínajúc druhou sériou. Máš kamaráta, ktorému matematika nie je cudzia? V obálke máš zadania druhej série dvojmo práve preto, aby si jedny mohol niekomu dať. Možno sa s ním neskôr stretneš na letnom tábore SEZAMu. (Nezabudni, že SEZAM je určený pre 7., 8. a 9. ročník ZŠ a triedy 2G, 3G a 4G na osemročných gymnáziách.)

Príklad č. 1 (opravovala Ivka Hrivová)

Označme hľadané 4-miestne číslo ako *vxyz.* Ak sú všetky cifry *v, x, y, z* rôzne, tak z nich vieme prehadzovaním dostať 24 rôznych kódov vrátane pôvodného kódu. (Premyslite si prečo.) Ak by boli niektoré z cifier rovnaké, tak kódov bude určite menej. Povedzme, že cifry *x* a *z* rovnaké, tak prehodením týchto cifier sa číslo nezmení, napríklad *vxyz* a *vzyx* sú v tomto prípade rovnaké čísla. Keďže prehadzovaním hľadaného čísla dostaneme 23 nových čísel, tak všetky cifry *v, x, y, z* musia byť rôzne. Pozrime sa na všetkých 24 čísiel, ktoré vieme z týchto 4 cifier zostrojiť.

Koľko je čísiel, ktoré budú mať na mieste tisícok cifru *v*? Prvá cifra je pevne stanovená, na druhé miesto vieme dať ľubovoľnú zo zvyšných troch cifier, na tretie miesto už vyberáme z dvoch cifier a na posledné miesto dosadíme tú cifru, ktorá nám ostala. Čísel začínajúcich cifrou *v* je teda $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Podobne každá ďalšia cifra sa tiež na mieste tisícok vyskytne 6-krát.

Rovnakým postupom sa dostaneme ku záveru, že aj na mieste stoviek bude každá z cifier *v, x, y, z* práve 6-krát. To isté platí aj pre miesto desiatok a miesto jednotiek. Súčet všetkých týchto 24 čísel preto vieme vyjadriť nasledovne:

$$6 \cdot (v + x + y + z) \cdot 1000 + 6 \cdot (v + x + y + z) \cdot 100 +$$
$$6 \cdot (v + x + y + z) \cdot 10 + 6 \cdot (v + x + y + z) = 6666 \cdot (v + x + y + z)$$

Zo zadania úlohy vieme, že súčet všetkých týchto 24 čísel je $vxyz + 147031$ (súčet pôvodného čísla + súčet zvyšných 23 čísiel). Preto platí $vxyz + 147031 = 6666 \cdot (v + x + y + z)$. Hľadáme teda násobok čísla 6666 väčší ako 147031. Prvým takým násobkom je $6666 \cdot 23 = 153318$. Teda po dosadení vyššie dostaneme $vxyz + 147031 = 153318$, takže *vxyz* je 6287. Navyše platí $6 + 2 + 8 + 7 = 23$, takže číslo 6287 vyhovuje.

Pre istotu sa pozrime aj naďalší násobok čísla 6666, ktorý je $6666 \cdot 24 = 159984$. Po dosadení dostaneme $vxyz + 147031 = 159984$, no potom $vxyz = 12953$, čo nevyhovuje. (Podobne pre vyššie násobky 6666 by *vxyz* muselo mať aspoň päť cifier.)

Hľadaným štvorčíselným číslom na stene je číslo 6287.

Príklad č. 2 (opravoval Kubo Kaloč)

Prvým krokom je uvedomiť si, že Pierrov kameň má dokopy dvanásť stien, jedenásť vrcholov pri podstave a jeden vrchol úplne hore, kde sa stretávajú všetky steny. Na každej stene je napísané nejaké prirodzené číslo, pričom tieto čísla nemusia byť nutne rovnaké. Ďalej zo zadania vieme, že hodnota pri každom vrchole sa počíta ako súčet čísiel na stenách, ktoré tento vrchol obsahujú. Označme si teda tieto čísla nasledovne:

- číslo na podstave označíme ako p,
- čísla na stenách označíme ako $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}$,
- číslo na vrchole, kde sa stretávajú všetky steny označme ako v_0,
- čísla na vrcholoch, kde sa stretávajú dve bočné steny a podstava si označme ako $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}$, pričom v_1 bude vrchol pri stenách s_1 a s_2, v_2 bude vrchol pri stenách s_2 a s_3, a tak ďalej.

Niektorí ste používali označovanie písmenkami, niektorí ste používali indexy, v tomto prípade bolo šikovné použiť indexy, aby sme nemuseli vymýšľať veľa písmeniek. Čísla na vrcholoch sú súčtom čísiel na stenách a to môžeme zapísať ako nasledujúce rovnice:

$$v_0 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9 + s_{10} + s_{11}$$

$$v_1 = s_1 + s_2 + p$$

$$v_2 = s_2 + s_3 + p$$

$$v_3 = s_3 + s_4 + p$$

$$v_4 = s_4 + s_5 + p$$

$$v_5 = s_5 + s_6 + p$$

$$v_6 = s_6 + s_7 + p$$

$$v_7 = s_7 + s_8 + p$$

$$v_8 = s_8 + s_9 + p$$

$$v_9 = s_9 + s_{10} + p$$

$$v_{10} = s_{10} + s_{11} + p$$

$$v_{11} = s_{11} + s_1 + p$$

V zadaní máme dané, že všetky čísla na vrcholoch sú rovnaké, takže určite bude platiť, že $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = v_7 = v_8 = v_9 = v_{10} = v_{11}$. Teda určite platí aj $s_1 + s_2 + p = s_2 + s_3 + p$, z čoho po odčítaní čísiel s_2 a p od oboch strán dostaneme rovnosť $s_1 = s_3$. Podobne z rovnosti $s_2 + s_3 + p = s_3 + s_4 + p$ dostaneme $s_2 = s_4$. Postupne takto odvodíme, že $s_1 = s_3 = s_5 = s_7 = s_9 = s_{11}$ a $s_2 = s_4 = s_6 = s_8 = s_{10}$. Nakoniec, odčítaním s_{11} a p od rovnosti $s_{10} + s_{11} + p = s_{11} + s_1 + p$ dostaneme, že platí $s_{10} = s_1$. To však znamená, že všetky čísla na stenách musia byť nutne rovnaké. Teraz, keď to už vieme, môžeme si tieto čísla na stenách pomenovať rovnako, napríklad s.

Súčet čísiel pri vrchole v_0 je teda $11 \cdot s$. Súčet čísiel pri ktoromkoľvek z vrcholov pri podstave je rovný $2 \cdot s + p$. Keďže sú všetky súčty pri vrcholoch rovnaké, tak $11 \cdot s = 2 \cdot s + p$, z čoho po úprave dostaneme $9 \cdot s = p$. Ďalej vieme, že súčet všetkých čísiel na stenách kameňa je 60, takže $60 = 11 \cdot s + p$. Do tejto rovnice môžeme namiesto p dosadiť $9 \cdot s$, takže $60 = 11 \cdot s + 9 \cdot s = 20 \cdot s$. Z tohto už ľahko dorátame $s = 3$ a $p = 27$.

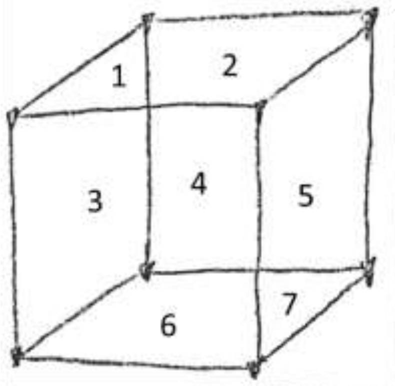
Na podstave kameňa je napísané číslo 27 a na bočných stenách je napísané číslo 3.

Poznámka k riešeniu:

Niektorí z vás ste najskôr zistili, že čísla na bočných stenách sú rovnaké a potom ste začali postupne dosadzovať na bočné steny čísla 1, 2 a 3, až ste zistili, že trojka funguje. Pri tomto postupe bolo však ešte dôležité overiť, že ak by ste pokračovali s číslami 4, 5, 6, …, tak by ste už žiadne ďalšie riešenie nenašli. Z rovníc to vyšlo jednoznačne, no pri skúšaní sa bolo potrebné zastaviť, keď už by súčet čísel na všetkých stenách bol väčší než 60.

Príklad č. 3 *(opravovala Betka Bohiníková)*

Postupne si označme prednú, bočnú pravú, zadnú, bočnú ľavú, hornú a dolnú stenu kocky ako **P**, **Bp**, **Z**, **Bl**, **H**, **D**. Napíšeme si kombinácie skiel, ktoré vytvárajú postupne 7 oblastí rôznej farby ktoré vidíme na obrázku.



1	2	3	4	5	6	7
H + **Bl**	**H** + **Z**	**Bl** + **P**	**P** + **Z**	**Z** + **Bp**	**P** + **D**	**Bp** + **D**

Oblasti 2, 4 a 5 sú všetky tvorené zadným sklom **Z**. Z toho vieme, že steny **H**, **P**, a **Bp** musia mať rôznu farbu, pretože inak by oblasti 2, 4 a 5 nemali rôzne farby. Znamená to, že potrebujeme minimálne 3 rôzne farby skiel kocky. Rovnakú úvahu môžeme spraviť aj pre oblasti 3, 4 a 6. V nich sa zase opakuje **P**. Takže vieme, že **Bl**, **Z** a **D** musia byť rôzne.

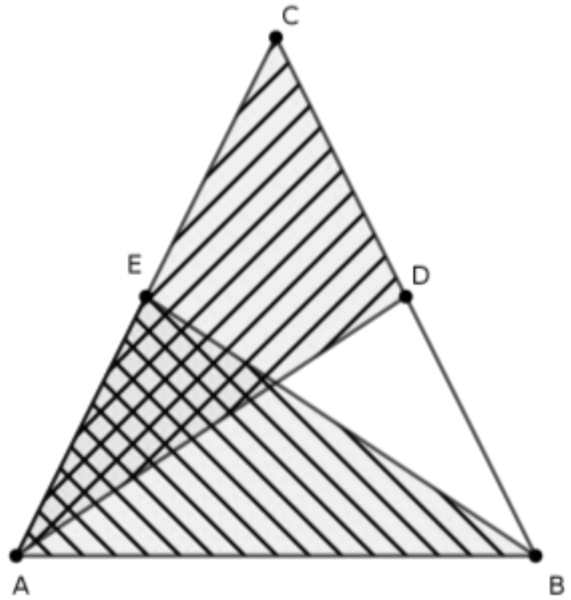
Skúsme teda použiť iba tri farby pre steny kocky, napríklad Modrú, Zelenú a Červenú. Vieme že všetky oblasti sú tvorené dvojicami stien. Z farieb M, Z a Č však vieme vytvoriť len 6 rôznych dvojíc: MM, MZ, MČ, ČZ, ZZ, ČČ. Oblastí je však 7 a teda tri farby nestačia.

Skúsme použiť 4 farby, pridáme Fialovú. Zo 4 farieb už máme 10 rôznych dvojíc: MM, MZ, MČ, ČZ, ZZ, ČČ, MF, ZF, ČF,FF. Jeden zo spôsobov akej farby sú steny kocky je:

P	**Bp**	**Z**	**Bl**	**H**	**D**
Č	*Z*	*F*	*M*	*M*	*Č*

Steny kocky musia mať najmenej 4 rôzne farby, aby vzniklo 7 oblastí rôznych farieb.

***Príklad č. 4** (opravovali Miloš Mičík a Timea Jakubócyová)*



Na základe toho, že body D a E ležia v strede strán BC a AC vieme povedať, že tieto body delia tieto strany na dve časti, ktoré sú rovnako dlhé. Takže platí |AE| = |EC| a |BD| = |DC|. Zároveň však vieme, že trojuholník ABC je rovnoramenný. To znamená, že jeho ramená, AC a BC, sú rovnako dlhé, a teda |AC| = |BC|. Tým pádom, keď rozdelíme dve rovnako dlhé úsečky na polovicu, dostaneme štyri rovnako dlhé úsečky. Teda úsečky AE, EC, CD a DB majú všetky rovnaké dĺžky:

$$\tfrac{1}{2} \cdot |AC| = |AE| = |EC| = |CD| = |DB|$$

Všimnime si, že úsečky AD a BE sú ťažnice trojuholníka ABC. Keďže trojuholník ABC je rovnoramenný a úsečky AD a BE sú ťažnice práve na tie strany trojuholníka, ktoré sú ramenami, majú tieto ťažnice rovnakú dĺžku. Takže platí |AD| = |BE|.

Pozrime sa teraz na trojuholníky zo zadania. Vidíme, že strana BE v trojuholníku ABE je rovnako dlhá ako strana AD v trojuholníku ADC. Zároveň strana EA v trojuholníku ABE je rovnako dlhá ako strana DC v trojuholníku ADC. Z toho vyplýva, že rozdiel 8 centimetrov v obvode spôsobuje len rozdiel dĺžok zvyšných dvoch strán, a to sú strana AB v trojuholníku ABE a strana AC v trojuholníku ADC. Keďže obvod trojuholníka ABE je o osem centimetrov väčší ako obvod trojuholníka ADC, môžeme teraz povedať, že strana AB je o osem centimetrov dlhšia ako strana AC. Dostaneme teda |AB| = |AC| + 8.

Už nám stačí využiť posledný údaj zo zadania, a to že obvod trojuholníka ABC je 50 centimetrov. Keďže základňa je o osem centimetrov dlhšia ako rameno, trojuholník zložený len z troch úsečiek dlhých tak ako rameno trojuholníka ABC by mal obvod 50 − 8 = 42 centimetrov. Jedno rameno má teda dĺžku 42 : 3 = 14 centimetrov. No a keďže základňa je o osem centimetrov dlhšia, musí mať 14 + 8 = 22 centimetrov. Rovnako toto vieme odvodiť aj rovnicami:

$$\begin{aligned}
o(ABC) &= |AB| + |BC| + |CA| = 50\text{ cm}\\
o(ABC) &= |AB| + 2 \cdot |AC| = 50\text{ cm}\\
o(ABC) &= |AC| + 8 + 2 \cdot |AC| = 50\text{ cm}\\
o(ABC) &= 3 \cdot |AC| + 8 = 50\text{ cm}\\
3 \cdot |AC| &= 42\text{ cm}\\
|AC| &= 14\text{ cm}
\end{aligned}$$

Strany trojuholníka ABC majú dĺžky |AC| = |BC| = 14 cm a |AB| = 22 cm.