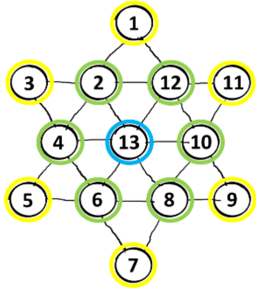
SEZAM, školský rok 2019/20, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
do rúk sa k vám práve dostali zadania tretej, a teda poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Lucy, Anke, Gallo a Pierre sa veľmi potešili všetkým vaším riešeniam. Zároveň na vás čaká záverečná sada úloh, s ktorými potrebujú pomôcť. Využite poslednú možnosť zabojovať o čo najlepšie umiestnenie vo finálnom poradí.
Pozorne sledujte stránku www.sezam.sk, kde budeme informovať o všetkom dôležitom ohľadom súťaže.

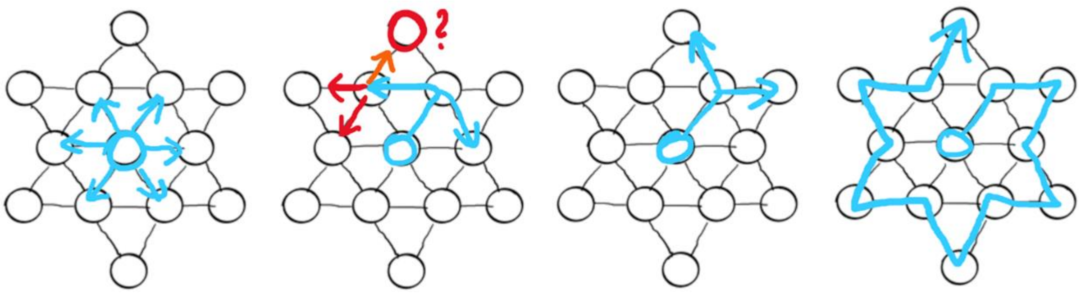
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

***Príklad č. 1** (opravovali Kika Kovalčíková a Maťka Gaňová)*



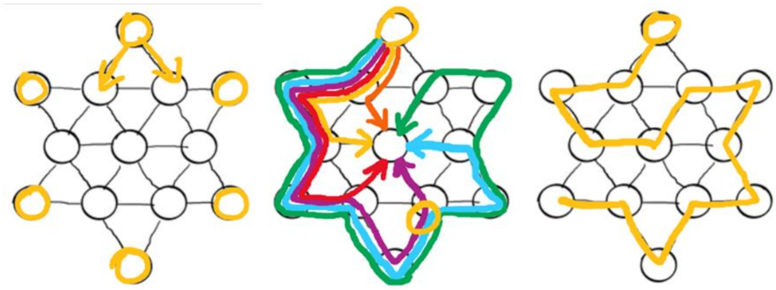
Na začiatok si označme jednotlivé pastviny číslami, aby sme o nich mohli písať. (Tak ako na obrázku nižšie.) Ako ste si všetci všimli, les s pastvinami je symetrický. Ak zistíme počet ciest, ktoré odchádzajú z pastviny 1, rovnako veľa ciest bude odchádzať napríklad aj z pastviny 3. Les vieme rozdeliť na tri druhy pastvín: žlté - vonkajšie pastviny, jedna stredná - modrá pastvina, a prechodové - zelené pastviny. Kľúčom k riešeniu je postupné prechádzanie všetkých možností. Postupne zistíme, koľko ciest začína vo vonkajších pastvinách, koľko ciest začína v prechodových pastvinách, a koľko ciest začína v strednej pastvine. Začnime tou strednou.

Zo stredu môžeme odísť šiestimi rôznymi cestičkami (prvý z obrázkov dole). Po jednom kroku sa môžeme rozhodnúť, či pôjdeme do vonkajšej alebo do prechodovej pastviny. Ak by sme druhým krokom zabočili do prechodovej pastviny (druhý obrázok), museli by sme si vybrať, či zabočíme po červených šípkach doľava, alebo po oranžovej šípke doprava. Ak by sme tretím krokom zabočili po oranžovej šípke, nedostali by sme sa do zvyšku hviezdy. Ak by sme tretím krokom zabočili po červených šípkach, nedostali by sme sa do červenej zakrúžkovanej pastviny. Druhý krok teda nemôže ísť do prechodovej pastviny. Urobme teda druhý krok do vonkajšej pastviny (tretí obrázok). Zas máme dve možnosti. Nech si vyberieme hociktorú, zvyšok pastvín sa dá prejsť už len cik-cak po okraji lesa (posledný obrázok). Ciest, ktoré začínajú v strede lúky, je $6 \cdot 2 = 12$. Všetky cesty tu majú jeden koniec v strede a jeden koniec na vonkajšej pastvine.



Poďme teraz skúsiť začať zo zelenej prechodovej pastviny, z čísiel 2, 4, 6, 8 alebo 10. Určite ste po pár skúšaniach zistili, že sa to nedá. Ako by sme to vedeli dokázať? Pozrime sa na čísla pastvín. Vidíme, že z párnej pastviny sa vieme dostať do inej párnej pastviny, aj do nepárnej pastviny. Ale čo ak stojíme na nepárnej pastvine? Odtiaľ sa vieme dostať iba do párnej pastviny. Nepárnych pastvín je sedem, párnych pastvín je šesť. Preto, ak chceme prejsť všetkými pastvinami, musíme začať nejakou nepárnou, potom striedať párne a nepárne, a skončiť na nepárnej pastvine. Ciest, ktoré začínajú na prechodových pastvinách, je 0.

Nakoniec sa pozrime na to, koľko ciest začína vo vrcholových pastvinách. Už vieme, že pri svojej ceste nesmieme z párnej pastviny zabočiť na inú párnu pastvinu. Na začiatku si môžeme v hociktorej zo šiestich vrcholových pastvín vybrať, či zabočíme doprava alebo doľava (prvý obrázok na nasledujúcej strane). Potom si ešte môžeme vybrať, kedy zabočíme do stredu (druhý obrázok). Spolu máme 6 možností, každá z nich sa dá dokončiť a prejsť už len jedným spôsobom – jeden príklad je na poslednom obrázku. Všimnime si, že iba zelená cesta je taká, že má jeden koniec v strede a jeden koniec na vonkajšej pastvine. Ostatné cesty majú obidva konce na vonkajších pastvinách. Ciest, ktoré začínajú na niektorej z vonkajších pastvín, je 6 · 2 · 6 = 72.



Spolu teda máme 12 + 72 = 84 ciest. Každú cestu sme ale započítali dva krát, lebo každá cesta má dva konce – raz sme ju prešli spredu a raz sme ju prešli odzadu. Preto, ak chceme vedieť, koľko je rôznych ciest, musíme ešte celkový počet vydeliť dvoma 84 : 2 = 42.

Spolu teda existuje 42 rôznych ciest.

Poznámka k riešeniu:
Niektorí z vás naschvál nepočítali s cestami, ktoré majú jeden koniec v strede. Veď ako by sme sa tam alebo odtiaľ dostali, bez toho, aby sme už raz prešli inými pastvinami? Aj takéto riešenia sme považovali za správne. Počet ciest je v tom prípade 42 – 12 = 30, keďže 12 je počet ciest, čo majú jeden koniec v strede.

Príklad č. 2 *(opravovala Robka Juríková)*

Potrebujeme nájsť všetky trojciferné prvočísla, ktorých ciferný súčet je dvojciferné prvočíslo, ktorého ciferný súčet je jednociferné prvočíslo. Aby sme nemuseli overovať všetky trojciferné prvočísla, čo by trvalo dlho, pozrime sa na to z opačnej strany. Tam budeme mať oveľa menej možností.

Jednociferné prvočísla sú 2, 3, 5 a 7. Dvojciferné číslo s ciferným súčtom 3 nemôže byť prvočíslom, pretože bude automaticky deliteľné 3. Hľadáme teda dvojciferné prvočísla s ciferným súčtom 2, 5 alebo 7. Hľadané prvočísla sú 11, 23, 41, 43 a 61. Tieto čísla majú byť ciferným súčtom trojciferného prvočísla. Avšak maximálny súčet troch cifier je 9 + 9 + 9 = 27. Z toho vyplýva, že Pierrovo dvojciferné prvočíslo môže byť najviac 27. Do úvahy pripadajú už len čísla 11 a 23. Lucy mohla napísať len 2 alebo 5.

Pozrime sa, ako vieme dostať 11 súčtom troch jednociferných čísel. Aby sme každú možnosť dostali iba raz, tak sčítance zoradíme vždy od najmenšieho po najväčšie. Možnosti budeme vypisovať postupne tak, aby sme mali na začiatku čo najmenšie čísla:

0 + 2 + 9, 0 + 3 + 8, 0 + 4 + 7, 0 + 5 + 6
1 + 1 + 9, 1 + 2 + 8, 1 + 3 + 7, 1 + 4 + 6, 1 + 5 + 5,
2 + 2 + 7, 2 + 3 + 6, 2 + 4 + 5
3 + 3 + 5, 3 + 4 + 4

Najmenší sčítanec nemôže byť 4 alebo viac, lebo súčet by bol aspoň 4 + 4 + 4 = 12, čo je viac než 11. Dostali sme teda všetky možnosti.

Teraz už prichádza len prácna robota. Potrebujeme poprehadzovať tieto cifry všetkými spôsobmi a pri každej overiť, či vzniknuté číslo je alebo nie je prvočíslo. Niektoré možnosti však nemusíme skúšať. Napríklad trojciferné prvočíslo nebude mať párne číslo alebo päťku na konci. Taktiež nemôžeme mať nula na začiatku, lebo číslo by nebolo trojciferné. Overením nájdeme tieto prvočísla: 911, 191, 281, 821, 173, 137, 317, 461, 641, 227, 263, 353 a 443.

Rovnaký proces zopakujeme aj pre 23. Súčet 23 vieme dostať týmito spôsobmi:

5 + 9 + 9, 6 + 8 + 7, 7 + 7 +9, 7 + 8 + 8

Opäť overíme, aké prvočísla vieme z týchto cifier dostať. Nájdeme tieto prvočísla: 599, 977, 797 a 887. Takto sme našli všetky prvočísla, ktoré mohla Anke napísať. Je ich spolu sedemnásť a sú to:

911, 191, 281, 821, 173, 137, 317, 461, 641, 227, 263, 353, 443, 599, 977, 797, 887

Príklad č. 3 (*opravoval Mojo Majdiš*)

Najprv sa pozrime, čo o riešení vieme povedať bez toho, aby sme čokoľvek počítali. Keď sa ku Gallovi pridá Pierre, tak im to trvá 60 minút, a keď sa k nemu pridá Lucy, tak sa tento čas natiahne až na 90 minút. A keďže Gallo v oboch prípadoch škrabe zemiaky rovnako rýchlo, tak Lucy musí byť pomalšia než Pierre. Podobne dostaneme, že Gallo je rýchlejší ako Lucy a Pierre je rýchlejší ako Gallo. Celkovo je teda Pierre najrýchlejší a Lucy najpomalšia. Tým sme zodpovedali druhú otázku zo zadania.

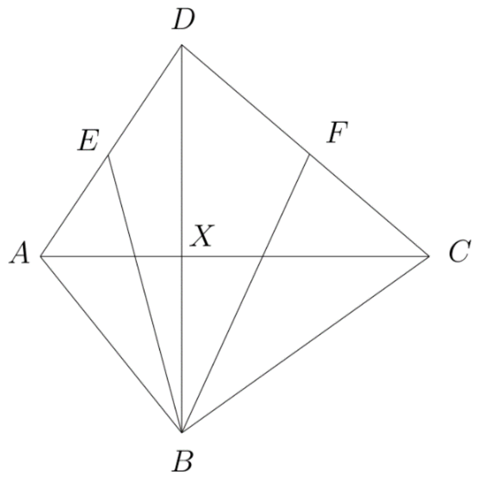
Ešte raz sa pozrime na informáciu, že Gallo a Pierre spolu oškrabú kotol za 60 minút. To však znamená, že keď im v tom ešte ktokoľvek pomôže – napríklad Lucy – tak im to potrvá kratšie. Vieme teda, že spolu to oškrabú za menej než hodinu.

A teraz môžeme začať počítať. Najprv zistime koľko toho jednotlivé dvojice naškrabú za rovnakú časovú jednotku. Pre jednoduchosť nech je to jedna minúta. Gallo a Pierre naškrabú plný kotol za 60 minút a teda za jednu minútu naškrabú 1/60 kotla. Obdobne dostávame, že Gallo a Lucy za minútu naškrabú 1/90 kotla a Pierre a Lucy 1/72 kotla.

Čo dostaneme keď tieto čísla spočítame? Vyjde nám akú časť kotla spolu za minútu naškrabú Gallo s Pierrom a Gallo s Luccy a Pierre s Lucy. Čiže dvaja Gallovia, dvaja Pierrovia a dve Lucy za minútu naškrabú 1/60 + 1/90 + 1/72 = 1/24. Na to, aby sme zistili, akú časť kotla spolu za minútu naškrabú jeden Gallo jeden Pierre a jedna Lucy, nám stačí toto číslo vydeliť dvomi (rozmyslite si prečo). A teda dostávame, že Gallo, Pierre a Lucy spolu za minútu naškrabú 1/48 kotla. Z toho už ľahko dopočítame, že celý kotol naškrabú za 48 minút. To súhlasí aj s naším pozorovaním z úvodu, že dokopy im to má trvať menej než hodinu.

Všetci traja spolu naškrabú zemiaky za 48 minút. Najpomalšia v škrabaní je Lucy.

***Príklad č. 4** (opravoval Adam Kňaze)*



Aby sme vyriešili túto úlohu potrebujeme najskôr vedieť aký je obsah štvoruholníka ABCD. Poznáme dĺžky jeho uhlopriečok |AC| = 1,4 m a |BD| = 1,2 m. Jeho obsah vieme spočítať napríklad ako súčet obsahov trojuholníkov ABD a DBC. Obsah trojuholníka vypočítame ako dĺžka strany trojuholníka vynásobená dĺžkou výšky na túto stranu a vydelená dvomi. Oba trojuholníky majú spoločnú stranu BD, a výšky na ňu sú strany AX a CX. Aké sú dĺžky týchto strán však nevieme (nevieme kde presne sa oštepy pretínajú). V skutočnosti to ale vedieť nepotrebujeme. Stačí nám vedieť, že ich súčet je 1,4 m (dĺžka strany AC).
Dĺžku strany AX si vieme vyjadriť ako dĺžka strany AC mínus dĺžka strany CX, teda |AX| = 1,4 - |CX|. Keď si teraz zapíšeme obsah štvoruholníka ABCD ako súčet obsahov trojuholníkov ABD a DBC, dostaneme tento výraz:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{ABC} = |BD| \cdot |AX| / 2 + |BD| \cdot |CX| / 2 = 1{,}2 \cdot (1{,}4 - |CX|) / 2 + 1{,}2 \cdot |CX| / 2$$

Vidíme, že výraz sa skladá z dvoch menších výrazov ktoré sa sčítavajú. Oba tieto menšie výrazy obsahujú násobenie 1,2 a delenie 2. Rovnaké časti vieme z týchto výrazov „vytiahnuť" von zo zátvorky (pretože a · b + a · c je to isté ako a · (b + c)), a ostane nám toto:

$$S_{ABCD} = 1{,}2 \cdot ((1{,}4 - |CX|) / 2 + |CX| / 2) = 1{,}2 \cdot (1{,}4 - |CX| + |CX|) / 2 = 1{,}2 \cdot 1{,}4 / 2 = 0{,}84$$

Dobre teda. Poznáme obsah štvoruholníka ABCD, teraz ešte potrebujeme zistiť obsah štvoruholníka EBFD. Zase sa môžeme zamerať na trojuholníky ABD a DBC. Body E a F ležia v stredoch strán AD a DC, preto strany EB a BF sú vlastne ťažnice trojuholníkov ABD a DBC. Ťažnica trojuholníka ho delí na dve polovice (ak neviete prečo, skúste si to dokázať), čo nám v tomto prípade veľmi pomôže. Nevieme síce presné obsahy trojuholníkov ABD a DBC, poznáme však ich súčet. Súčet obsahov trojuholníkov EBD a DBF bude polovica súčtu obsahov trojuholníkov ABD A DBC. Preto aj obsah štvoruholníka EBFD bude polovica obsahu štvoruholníka ABCD, konkrétne 0,84 : 2 = 0,42. A to je riešenie tejto úlohy.

Obsah štvoruholníka BFDE je 0,42 m².