SEZAMKO 2019/2020, Vzorové riešenia 2. série letnej časti

*Milí riešitelia,
ani sme sa nenazdali a už s vami musíme rozlúčiť. Opravili sme totiž poslednú sériu SEZAMKa v tomto školskom roku.*

Adriana a Tézeus vám všetkým veľmi pekne ďakujú za všetky matematické problémy, s ktorými ste im pomohli. V septembri k vám (ak ste nám v hlavičkách písali správnu adresu) zavítajú noví rozprávkoví hrdinovia. Nechajte sa prekvapiť, kto to bude tentoraz. Pokiaľ ste už šiestaci alebo primania a SEZAMKa budúci rok podľa pravidiel nebudete môcť riešiť, nesmúťte. Väčší brat SEZAMKa – volá sa SEZAM, na Vás určite bude myslieť a pošle vám svoje zadania. Aby ste budúci rok patrili k tým najšikovnejším, nezabudnite si prečítať aj tieto vzorové riešenia…

*V minulé roky sme na tomto mieste upozornili riešiteľov, že letná časť SEZAMKa bude zakončená spoločným sústredením najlepších riešiteľov na konci mája. Aj tento rok máme na víkend 29. až 31. mája rezervovaný pre 32 účastníkov pobyt v juniorhoteli Piatrová vo Vrútkach. Keďže je takmer isté, že tak skoro sa ešte pobytové akcie nebudú môcť konať, sústredenie v tomto termíne zorganizuje na internete. Už sa nám to podarilo v marci s riešiteľmi SEZAMu, určite to zvládneme aj teraz.
Stretnúť sa s Vami osobne ale určite chceme. Máme preto rezervovaný aj náhradný termín sústredenia na 18. až 20. september v penzióne Roháč na Hutách. To by už malo vyjsť.
Podrobnosti nájdete v pozvánke na tieto sústredenia. Vyplňte pozorne aj návratku, údaje v nej použijeme na ďalšiu organizáciu sústredení. Sledujte aj upozornenia, ktoré zverejňujeme na www.sezam.sk*

Úspešný koniec školského roka a pekné prázdniny vám želajú všetci vedúci SEZAMKa.

Príklad č. 1 (opravovala *Nina Benková*)

Máme mince dvoch druhov – s hodnotou 3 mikény a s hodnotou 7 mikénov. Našou úlohou je nájsť najväčšiu takú sumu, ktorú pomocou týchto mincí vyplatiť nevieme.

Bolo výhodné začať postupne skúšať vyskladávať jednotlivé sumy. Väčšina z vás išla postupne od sumy 1 a rýchlo ste zistili, že najväčšia nevyplatiteľná suma bude pravdepodobne 11. Nie je deliteľná troma, takže zo samých trojok ju vyskladať nevieme. Ak použijeme jednu sedmičku, tak nám ostane 11 – 7 = 4 a to z trojok nevyskladáme. Viac sedmičiek použiť už nevieme, lebo by sme dostali sumu väčšiu ako 11. Ďalej bolo treba poriadne ukázať, že ozaj všetky čísla väčšie ako 11 vyplatiť vieme.

a) Suma 12 = 3 + 3 + 3 + 3. Keď k nej pripočítame ďalšie trojky, dostaneme 12 + 3 = 15, potom 18, 21… čiže vieme dostať všetky násobky trojky.
b) Keď k sume 13 = 7 + 3 + 3 pripočítavame trojky, vznikajú nám sumy 16, 19, 22… všimnime si, že takto dostaneme všetky čísla väčšie než 12, ktoré majú po delení tromi zvyšok 1.
c) Keď k sume 14 = 7 + 7 pripočítavame trojky, dostaneme sumy 17, 20, 23… teda sumy, ktoré majú po delení tromi zvyšok 2.

Každé číslo väčšie ako 11 patrí určite do jednej zo skupiniek a), b) alebo c), a teda sa dá vyskladať.

Najväčšia nevyplatiteľná suma je 11 mikénov.

Iné riešenie:
*Ukážeme si iný spôsob ako ukázať, že všetky sumy od 12 mikénov vyššie idú vyplatiť. Pozrime sa na nejakú konkrétnu sumu, napr. 12 = 3 + 3 + 3 + 3. Aké mince musíme za aké vymeniť, aby sme dostali číslo o 1 väčšie? Uberieme z dvanástky dve trojky (3 + 3 = 6) a miesto nich pridáme sedmičku. Teda dostaneme 3 + 3 + 7 = 13.
Podobne, keď sa v nejakej sume nachádzajú dve sedmičky (7 + 7 = 14), tak ich môžeme ubrať, dať miesto nich päť trojok (3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15) a znovu dostaneme sumu o 1 väčšiu.
No budeme mať vždy z čoho uberať? Keby sme nemali akú dvojicu ubrať, tak to znamená, že sa v sume nachádza najviac jedna trojka a najviac jedna sedmička. Čiže táto suma je najviac 3 + 7= 10. Čiže v sumách väčších ako 11 musia byť určite aspoň 2 trojky alebo aspoň 2 sedmičky a teda vždy budeme mať akú dvojicu ubrať.*

Príklad č. 2 (opravovala *Anežka Pajunková*)

Hľadáme, ktoré trojciferné a dvojciferné číslo majú čo najväčší súčin, pri čom platí, že čísla obsahujú cifry od 1 po 5 práve raz. Väčšina z vás prišla na to, že čím je cifra väčšia, tým viac vľavo musí byť v danom čísle. Napríklad ak by sme vynásobili čísla 5**12** a 43 tak určite dostaneme menší súčin, ako keď vynásobíme 5**21** a 43. V oboch číslach teda pôjdu cifry od najväčšej po najmenšiu (zľava doprava).

Cifry musia ísť v oboch číslach od najväčšej po najmenšiu a čísla obsahujú cifry 1, 2, 3, 4 a 5, každú práve raz. To je vcelku dosť obmedzení, skúsme teda vypísať všetky možnosti dvojíc čísiel. Vypisovať budeme podľa cifry na mieste stoviek v trojcifernom čísle.

Cifry 1 ani 2 na mieste stoviek nemôžu byť, lebo na mieste desiatok a jednotiek potrebujeme dve rôzne menšie cifry. Ak na miesto stoviek bude cifra 3, tak máme jedinú možnosť: 321 a 54. Ak na mieste stoviek bude cifra 4, tak máme tri možnosti: 421 a 53, 431 a 52, 432 a 51. Nakoniec, ak máme na mieste stoviek cifru 5, tak máme 5 možností: 521 a 43, 531 a 42, 541 a 32, 542 a 31, 543 a 21.

Čísla 321 a 54 nám dajú súčin 17 334. Dvojice 421 a 53, 431 a 52, 432 a 51 nám dajú súčiny 22 313, 22 412 a 22 032. Najväčší súčin je teda zatiaľ 431 · 52 = **22 412**. Ďalej sa pozrime na dvojice 521 a 43, 531 a 42. Prvá dá súčin 22 403, druhá dá súčin 22 302.

Nakoniec sa pozrime na dvojice 541 a 32, 542 a 31, 543 a 21. Zasa by sme mohli čísla vynásobiť a porovnať súčiny, skúsme si ale našu robotu zjednodušiť. Vo všetkých troch prípadoch je trojciferné číslo menšie ako 600 a dvojciferné číslo menšie ako 35. Takže súčin každej dvojice bude vždy určite menší ako 600 · 35 = 21 000, čo je určite menej ako 22 412. Otestovali sme všetky možnosti a zistili sme, že najväčší súčin dostaneme vynásobením čísiel 431 a 52.

Ariadna a Tézeus vymysleli čísla 431 a 52.

Príklad č. 3 (opravovala Kaťa Jasenčáková)

Pozrime sa na vety, ktoré sestry povedali a skúsme prísť na to, či a ktoré sú pravdivé a ktoré nepravdivé. Na základe toho zodpovieme otázky z úlohy. Sestry povedali:

Prvá: Ja som Tinežka. Klamem v sobotu. A klamem aj v nedeľu.

Druhá: Ja budem klamať zajtra.

Vieme, že jedna z nich klame v pondelok, utorok a v stredu. V ostatné dni hovorí pravdu. Druhá z nich klame vo štvrtok, piatok a sobotu a v ostatné dni hovorí pravdu. Teda obidve sestry hovoria v nedeľu pravdu. Prvá sestra povedala vetu: „A klamem aj v nedeľu." Keďže obidve hovoria v nedeľu pravdu, táto veta je klamstvo. To znamená, že prvá sestra klame.

Každá zo sestier celý deň iba klame, alebo iba hovorí pravdu. Zistili sme, že prvá zo sestier už jedno klamstvo povedala. Preto aj ostatné vety, ktoré povedala sú klamstvo. Takže je klamstvom aj to, že je Tinežka. Preto prvá sestra musí byť Anmea.

Podobne je klamstvo aj to, že prvá sestra (Anmea) klame v sobotu. Preto v sobotu Anmea hovorí pravdu. Aby neklamala v sobotu, Anmea musí klamať v pondelok, utorok a stredu. A keďže dnes klame, tak dnes je pondelok, utorok alebo streda.

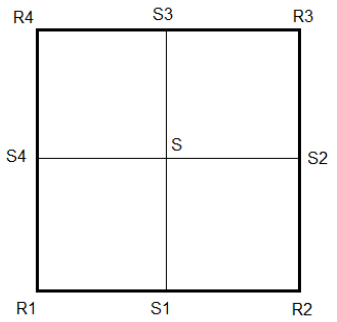
Druhá sestra je Tinežka a klame vo štvrtok, piatok a sobotu. Keďže dnes je pondelok, utorok alebo streda, tak dnes Tinežka hovorí pravdu. Je teda pravda, že Tinežka zajtra bude klamať, takže musí byť streda.

Dnes je streda. Tinežka je druhá sestra. Anmea klame v pondelky, utorky a v stredy.

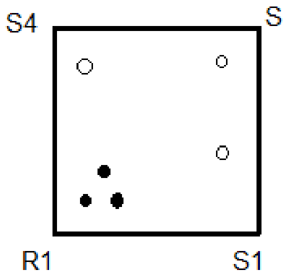
Príklad č. 4 (opravovala Ajka Kucharíková)

Úlohou je zistiť, kde je vo štvorcovej sále biely a čierny mramor, a akú časť sály pokrýva. Skúsime to najskôr nakresliť a potom vypočítať. V zadaní sa píše že sálu dláždili. Niektorí ste riešili akými dlaždicami to robiť, teda na koľko štvorcov treba sálu rozdeliť. My to spravíme tak, že môžeme použiť hocijaké dlaždice (aj úplne malé). Preto si nakreslíme podlahu bez dlaždíc.

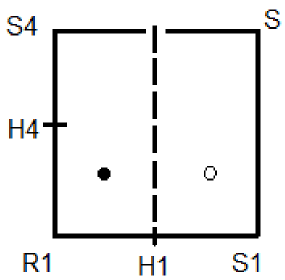
Vieme, že čierny mramor je na miestach, ktoré sú bližšie k rohu sály, ako k stredu strany sály. Označme si rohy sály písmenami R1, R2, R3, R4 a stredy strán sály písmenami S1, S2, S3, S4. Stred celej sály označme S. Keď si nakreslíme úsečky medzi bodmi S1 a S3 a medzi bodmi S2 a S4, tak rozdelím sálu na štyri rovnaké časti. Bude nám stačiť vyriešiť jednu štvrtinu a ostatné budú rovnaké.



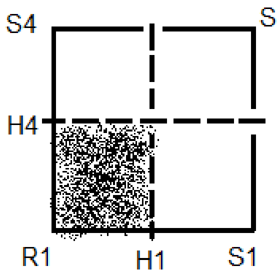
Keď vyskúšame zopár náhodných bodov, tak pri každom vieme odmerať, či je bližšie k R1 alebo k jednému z bodov S1 a S4. Teraz to chceme urobiť nejako všeobecnejšie.



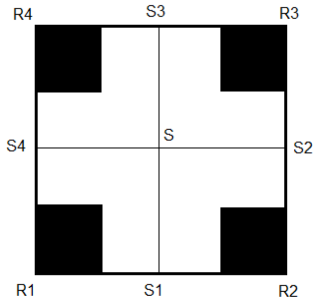
Pozrime sa na úsečku R1,S1. Jej ľavá polovica bude čierna (je bližšie k R1) a pravá polovica bude biela (je bližšie k S1). Presne v strede bude hraničný bod H1, ktorý je rovnako ďaleko od oboch a bude sa v ňom meniť farba. Skúsime nájsť aj ďalšie hraničné body, rovnako vzdialené od R1 a S1. Na obrázku nižšie sú na čiarkovanej zvislej čiare. Všetky body od nej naľavo sú bližšie k R1 a teda čierne, a všetky napravo sú bližšie k S1 a teda biele.



Podobne to je pre R1 a S4. V strede medzi nimi je hraničný bod H4. Ďalšie hraničné body budú na vodorovnej čiare idúcej z H4. Body nad čiarou sú biele (bližšie k S4) a pod čiarou sú čierne (bližšie k R1).



Keď to dáme dokopy, tak štvorec tvorený bodmi R1, S1, S a S4 rozdelíme na štyri menšie štvorce. Ten pri vrchole R1 bude čierny a ostatné biele. Kedže všetky čiary šli stredmi strán, tak je čierna presne štvrtina štvorca. Rovnako to bude a v ostatných častiach sály. Takže ¼ sály je čierna a ¾ sály sú biele.



Bielym mramorom sú vydláždené tri štvrtiny sály,
čiernym mramorom je vydláždená jedna štvrtina sály.