SEZAM, školský rok 2020/21, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,
veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Rušňovodič Tonko a kamaráti Miško, Dáška a Baška sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniam. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami, na ktoré natrafia pri svojej cesta Mazes Expresom. Popri počítaní nových úloh si môžete precvičiť vaše matematické bunky pri čítaní týchto vzorových riešení.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Denisa Múthová*)

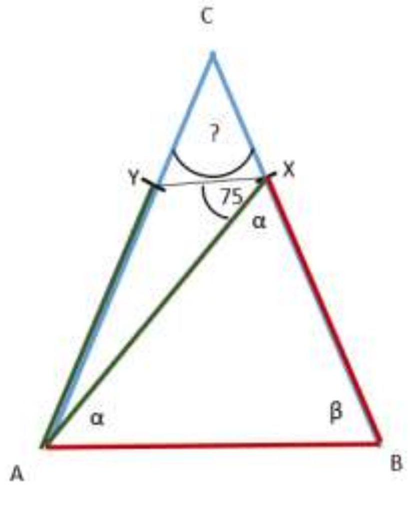
Našou úlohou je zistiť koľko stál lístok na konečnú zastávku Mazes Expresu. Zo zadania vieme, že Miško mohol mať pred kúpou svojho lístka žetón v hodnote medzi 1 až 20 grošov.

Začnime napríklad od konca, a zistime akú hodnotu mali tri rôzne žetóny, ktoré mu zostali, keď kúpil druhý lístok na vlak. Najmenšia možnosť je 1 + 2 + 3 groše, dokopy 6. Potom by mu ostalo na dva lístky maximálne 14 grošov, pretože najväčší žetón, ktorý Miško mohol vlastniť bol žetón s hodnotou 20 (20 – 6 = 14) grošov. A preto jeden lístok, ktorý musí stáť viac ako 6 grošov, stojí 7 grošov. Toto riešenie sedí zadaniu (7 + 7 +6 = 20).

Čo ak mu po kúpe dvoch lístkov ostali dokopy žetóny s hodnotou viac ako 6 grošov? Dajme tomu, že 7. Napríklad tri žetóny s hodnotou 1 + 2 + 4. Potom ak by mal zasa Miško maximálne 20 grošov, na dva lístky by mal 20 – 7 = 13 grošov. Teda jeden by mohol stáť maximálne 6 grošov, čo je však menej ako 7 grošov, čo mal po kúpe dvoch lístkov, a teda by vedel kúpiť aj tretí lístok. Toto riešenie nesedí zadaniu, a preto po kúpe lístkov mal Miško práve tri žetóny v hodnote 6 grošov.

Prišli sme na to, že Miškovi ostali tri žetóny v hodnote 6 grošov. Posledné čo musíme preveriť, je akú hodnotu žetónu mohol mať Miško na začiatku. Mohol mať aj menej ako 20 grošov? Ak by mal 19 grošov a odpočítame 6 grošov, ktoré ostali Miškovi na konci, ostane nám 13 grošov. Ale keďže lístok je drahší ako 6 grošov, tak za 13 grošov sa dva lístky kúpiť nedajú, takže táto možnosť nevyhovuje. Lístok na vlak stál 7 grošov.

Príklad č. 2 (*opravovali Betka Bohiníková a Maťo Sopóci*)



V každom geometrickom príklade je užitočné nakresliť si obrázok a zaznačiť si doň všetky dôležité informácie. (Niektorí z vás tento krok vynechali, odporúčame naň do budúcna nezabudnúť ☺.) Na obrázku môžete vidieť ktoré strany sú rovnako dlhé, označili sme ich rovnakou farbou.

Prvé čo si môžeme všimnúť je rovnoramenný trojuholník AYX. Vieme, že v rovnoramennom trojuholníku sú uhly pri základni zhodné. V trojuholníku AXY je základňou strana XY, a preto je uhol AYX rovnako veľký ako uhol YXA, teda 75°. Každý trojuholník má súčet vnútorných uhlov 180°, z toho vyplýva, že $|\angle XAY| = 180° - |\angle AYX| - |\angle YXA| = 180° - 75° - 75° = 30°$.

Trojuholníky ABC a ABX sú rovnoramenné, a teda uhly BAC a CBA sú rovnako veľké a podobne aj uhly BAX a AXB sú rovnako veľké. Ďalej vieme, že uhly v trojuholníku ABX musia mať súčet 180° to znamená, že $|\angle BAX| + |\angle AXB| + |\angle XBA| = 180°$. Pomocou uvedených informácií vieme zostaviť dve rovnice o dvoch neznámych. Označme neznáme veľkosti uhlov nasledovne:

$$\alpha = |\angle BAX| = |\angle AXB|$$
$$\beta = |\angle XBA| = |\angle CBA| = |\angle BAC|$$

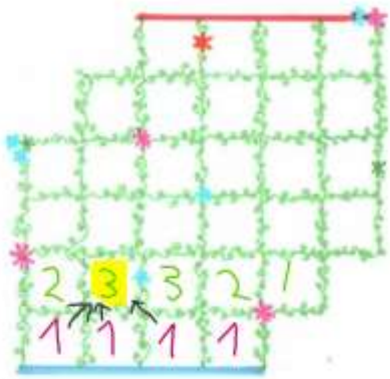
Potom dostávame:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{30° + \alpha}$$
$$2\alpha + \boldsymbol{\beta} = 180°$$
$$2\alpha + \mathbf{30° + \alpha} = 180°$$
$$3\alpha = 180° - 30°$$
$$3\alpha = 150°$$
$$\alpha = 50°$$
$$\beta = 30° + \alpha = 30° + 50° = 80°$$

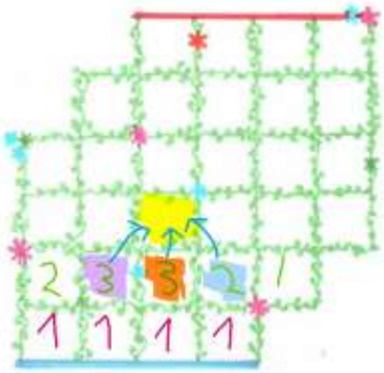
Keďže už poznáme veľkosti dvoch uhlov trojuholníka ABC, stačí opäť využiť, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Z toho vyplýva, že $|\angle ACB| = 180° - 80° - 80° = 20°$.

Príklad č. 3 (opravoval Maťo Bachratý)

Poďme postupne odspodu zisťovať, koľkými rôznymi cestami sa vieme dostať do jednotlivých políčok.



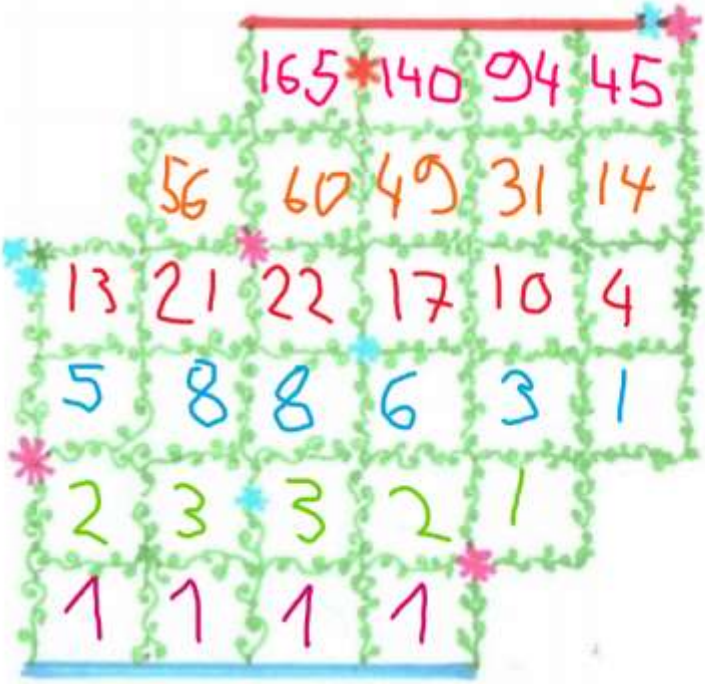
Na každé zo štyroch začiatočných políčok vedie len 1 cesta. (Rovno na dané políčko skočíme.) Pre každé políčko v druhom rade je vcelku jednoduché dopočítať počet rôznych ciest, ktoré naň vedú. Napríklad na žlté políčko na obrázku vyššie vedú tri rôzne cesty, každá z iného začiatočného políčka. Pozrime sa teraz na tretí rad.



Skúsme zistiť, koľko rôznych ciest vedie na žlté políčko na obrázku vyššie. Mohli by sme opäť nakresliť a zrátať všetky cesty sem vedúce, no už by to bolo náročnejšie a riskovali by sme, že sa pomýlime. Poďme na to trochu inak. Ako bude vyzerať posledný skok pred tým než dojdeme na žlté políčko? Každým skokom vystúpame o jeden rad, takže posledný skok pôjde z druhého radu. Navyše posledný skok (cesty na žlté políčko) nemôže ísť z krajných políčok druhého radu, odtiaľ na žlté políčko nedoskočíme.

Takže posledný skok cesty na žlté políčko bude buď z fialového, oranžového alebo modrého políčka. Už vieme, že na fialové políčko sa vieme dostať 3 rôznymi cestami, pridaním ešte jedného skoku šikmo doprava dostaneme 3 rôzne cesty ako doraziť na žlté políčko. (Navyše toto budú všetky možné cesty na žlté políčko skrz fialové políčko, zamyslite sa prečo.) Na oranžové políčko sa tiež vieme dostať 3 rôznymi cestami, pridaním skoku rovno dopredu dostaneme ďalšie 3 cesty ako doraziť na žlté políčko. (Od prvých troch sa určite líšia, lebo tie išli cez fialové políčko, zatiaľ čo tieto idú cez oranžové políčko). No a na modré políčko sa vieme dostať 2 rôznymi cestami, pridaním skoku šikmo doľava dostaneme ešte 2 nové cesty ako doraziť na žlté políčko. Prešli sme cez všetky možnosti posledného skoku, takže sme na žiadnu cestu na žlté políčko nezabudli. Dokopy ich je teda 3 + 3 + 2 = 8.

No a tento spôsob rátania ciest už môžeme použiť na celý tretí rad, potom na celý štvrtý rad, a tak ďalej až po posledný rad. Na zistenie počtu ciest vedúcich do nejakého políčka sa jednoducho pozrieme na všetky políčka o rad nižšie, z ktorých doň vieme skočiť, a potom zrátame čísla v týchto políčkach.



Napríklad číslo 140 v hornom rade sme dostali ako súčet čísel 60, 49 a 31, lebo to sú čísla v políčkach, z ktorých sa dá do tohto políčka skočiť. Celkovo sa teda na políčka v poslednom rade vieme dostať 165 + 140 + 94 + 45 = 444 rôznymi cestami.

Poznámka k riešeniu:
Úloha sa samozrejme dala vyriešiť aj vypisovaním možností. Pri tom však bolo ozaj dôležité mať dobrý systém, v ktorom sa nedá ľahko pomýliť. Všetkým z vás, čo mali dobrý systém, sa navyše podarilo nájsť rôzne zlepšováky ako si rátanie urýchliť.

Príklad č. 4 (opravovala Robka Juríková)

Zo zadania máme nasledovných päť skutočností, na základe ktorých chceme obviniť jedného z trojice Baška, Dáška a Miško z krádeže horalky:

(1) Okrem Miška, Dášky a Bašky k pultu nikto iný v tom čase neprišiel. (T.j., ak to nebol niekto z trojice, tak potom to nemohol byť nikto. Neznamená to však, že prípad, keď sú všetci traja nevinní nemôže nastať.)
(2) Ak je vinná Baška, tak mala práve jedného spolupáchateľa.
(3) Ak je Dáška nevinná, tak je nevinný aj Miško
(4) Ak sú vinné práve dve osoby, tak jednou z nich je Baška
(5) Ak je nevinný Miško, tak je nevinná aj Dáška

Horalku mohli ukradnúť len jeden, dvaja alebo traja ľudia, prípadne nikto a Tonko si všetko vymyslel.

Ak by horalku ukradla Baška, tak musela mať práve jedného spolupáchateľa (2). Keby ním bol Miško, tak by bol vinný, ale Dáška by bola nevinná. To je však v spore s tým, že ak je Dáška nevinná, tak je nevinný aj Miško (3). Ak by bola jej spolupáchateľom Dáška, tak je vinná a Miško je nevinný. Teraz máme spor s tým, že ak je nevinný Miško, tak je nevinná aj Dáška (5). Horalku nemohli ukradnúť ani všetci traja, lebo potom by Baška bola vinná a zároveň by mala dvoch spolupáchateľov, čo je v rozpore s (1). Z toho môžeme usúdiť, že Baška je určite nevinná.

Všimnime si, že z bodov (3) a (5) pre Miška a Dášku platí, že buď sú obaja vinný alebo sú obaja nevinný. Ak by boli obaja vinný, tak sú vinné práve dve osoby (o Baške už vieme, že je nevinná). No to je v rozpore s (4). Ak by boli obaja nevinný, tak všetky body vyhovujú. Zo zistených skutočností teda vyplýva, že horalku nemohol ukradnúť nikto z trojice Dáška, Baška, Miško. (Teda si to celé Tonko vymyslel ☺.)

Tu si ešte môžete pozrieť všetky prípady, ktoré mohli nastať a s ktorou skutočnosťou sú v spore.
(1 znamená vinný, 0 znamená nevinný, x znamená rozpor so skutočnosťou s daným číslom)

Miško	Baška	Dáška	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	1					x
0	1	0		x			
1	0	0			x		
0	1	1					x
1	0	1				x	
1	1	0			x		
1	1	1		x			
0	0	0					