

SEZAMKO 2020/2021, Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Milí riešitelia,

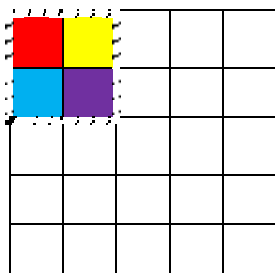
veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMKA. Amanda a Erik sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniami. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ďalšími problémami, na ktoré natrafia v studenom Grónsku. Popri počítaní nových úloh si môžete rozhýbať vaše matematické svaly pri čítaní týchto vzorových riešení.

Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMKovi nájdete aj na stránke www.sezam.sk

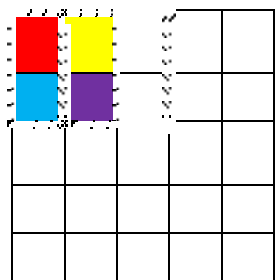
Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú organizátori SEZAMKa.

Príklad č. 1 (opravovala Maťa Kudelčíková)

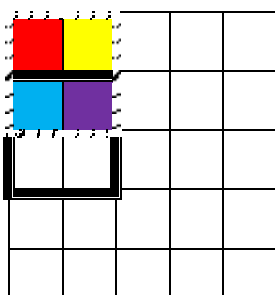
Našou úlohou je na koláč rozmeru 5×5 políčok zmestiť čo najviac hviezdíčiek tak, aby sme spĺňali zároveň aj všetky podmienky zo zadania. Keďže v každom štvorci 2×2 majú byť presne tri rovnaké ozdoby, najideálnejší prípad bude taký, že tieto tri ozdoby budú hviezdíčky. Ideme zistiť či to vôbec pôjde. Chceme čo najmenej ľadových kociek, takže ich budeme pokladať do takých políčok, ktoré pokryjú čo najviac štvorcov 2×2 . Pozrime sa na prvý štvorec:



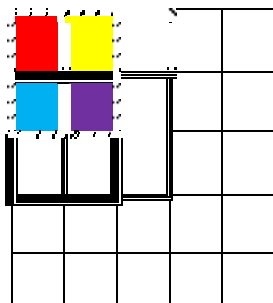
Už sme si povedali, že v ňom chceme ideálne 3 hviezdíčky a 1 ľadovú kocku. Ak by ľadová kocka bola na červenom políčku, pokryla by nám len tento jeden štvorec 2×2 a to je celkom málo – o to viac ľadových kociek by sme potrebovali pri ďalších štvorcoch (a o to menej miesta na hviezdíčky by nám ostalo). Ak by ľadová kocka bola na žltom políčku, pokryla by nám už dva štvorce, náš farebný a aj vlnkovaný (do zvyšných políčok týchto štvorcov už môžeme s kludom vložiť iba hviezdíčky).



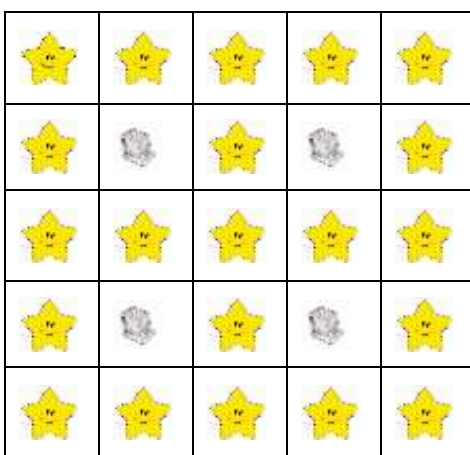
Ak by sme ľadovú kocku umiestnili do modrého políčka, pokryla by nám opäť dva štvorce 2×2 – náš farebný a orámovaný štvorec pod ním.



Nakoniec ak by sme dali ľadovú kocku do fialového políčka, na tomto mieste by nám pokryla dokonca až 4 štvorčky:



Vidíme, že je to preto najlepšia poloha na umiestnenie ľadovej kocky v rámci celého zvýrazneného štvorca 3×3. Keď ju takto umiestnime, do zvyšných políčok v týchto 4 štvorčkoch vieme dopísať už len hviezdičky a stále bude platiť, že v každom sú 3 rovnaké ozdoby. Analogicky vieme vyplniť celý štvorec 5×5, pričom použijeme tento štvorec 3×3 ešte trikrát s tým, že niektoré políčka sa nám budú prelínať (tam sú všade ale iba hviezdičky takže to nič nepokazí). Celé riešenie bude vyzeráť nasledovne:



Príklad č. 2 (opravovali Maťo Kaláb a Miloš Mičík)

Vieme, že práve jeden z troch psov povedal pravdu. Poďme sa teda pozrieť na to, ako to bude vyzeráť v situáciách, kde postupne každý hovorí pravdu.

Keby Sorbet hovoril pravdu, znamenalo by to, že Polárka zjedla koláč. V takom prípade by ale musel Nanuk klamať. Nanuk povedal, že on ten koláč nezjedol. Keďže však klame, znamenalo by to, že ho zjedol. Lenže ľadový medveď nám povedal, že koláč zjedol len jeden pes. Teraz nám vychádza, že koláč zjedli aj Polárka aj Nanuk. Sorbet teda nemôže hovoriť pravdu.

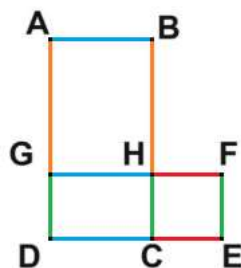
Ak hovorí pravdu Polárka, znamenalo by to, že Sorbet naozaj klame. Keďže povedal, že koláč zjedla Polárka, znamenalo by to, že Polárka ho nezjedla. Keďže teraz je Polárka tá čo hovorí pravdu, Nanuk musí klamať o tom že ho nezjedol, a teda ho zjedol. V tejto situácii si nič neprotirečí, teda koláč naozaj mohol zjesť Nanuk.

Nakoniec sa pozrime na to, ako by to vyzeralo, kebyže pravdu hovorí Nanuk. V takom prípade by Sorbet aj Polárka klamali. Polárka hovorí, že Sorbet klame. My ale vieme, že Polárka klame. To znamená, že by Sorbet musel hovoriť pravdu. My ale vieme že v tejto situácii pravdu hovorí Nanuk, teda si to navzájom protirečí.

Zistili sme, že jediná možnosť, ktorá si neprotirečí tá, kde pravdu hovorí Polárka. Z toho vieme usúdiť, že koláč zjedol Nanuk.

Koláč zjedol Nanuk.

Príklad č. 3 (opravovali Braňo Krivulčík a Marián Kurčina)



Všetky uhly v obrázku sú pravé, teda vieme, že tieto strany majú rovnakú dĺžku:

$$|AB| = |GH| = |DC|$$

$$|AG| = |BH|$$

$$|GD| = |HC| = |FE|$$

$$|HF| = |CE|$$

Dĺžka úsečky HF je 4m a dĺžka úsečky DE je 10m, z toho dokážeme vypočítať dĺžku GH:

$$|GH| = |DE| - |HF| = 10\text{m} - 6\text{m} = 4\text{m}$$

Teraz, keď už poznáme dĺžky úsečiek AB a AD, tak vieme vypočítať obsah obdĺžnika ABCD. Dostávame $S_{ABCD} = 6\text{m} \cdot 12\text{m} = 72\text{m}^2$. Ďalej vieme, že obsah obdĺžnika CEFH je rovný rozdielu obsahu celej hvezdárne a obsahu obdĺžnika DCBA. Teda $S_{CEFH} = 84\text{m}^2 - 72\text{m}^2 = 12\text{m}^2$.

V obdĺžniku CEFH poznáme jeho obsah a dĺžku strany HF. Pomocou tohto dokážeme zistiť aj dĺžku druhej strany EF:

$$|HF| \cdot |EF| = S_{CEFH}$$

$$4\text{m} \cdot |EF| = 12\text{m}^2$$

$$|EF| = 12\text{m}^2 : 4\text{m} = 3\text{m}$$

Teraz už dokážeme vypočítať, že obsah hľadaného obdĺžnika DCHG je $6\text{m} \cdot 3\text{m} = 18\text{m}^2$.

Príklad č. 4 (opravovala Nina Benková)

Amanda sčítala čísla od 15 po číslo $15 + 900 - 1 = 914$. (Porozmýšľajte, prečo tam je -1 , príp. si to skúste najskôr na menších číslach.) Erik sčítaval čísla od 25 po $25 + 901 - 1 = 925$. Teraz sa pozrieme na to, ako vyzerali ich súčty:

$$\begin{array}{l} \text{Amandin súčet:} \quad 15 + 16 + \dots + 914 \\ \text{Erikov súčet:} \quad 25 + 26 + \dots + 924 + 925 \end{array}$$

Môžeme si všimnúť, že každé Erikovo číslo je o 10 väčšie od príslušného Amandinho. Teda 25 je o 10 väčšie od 15, 26 je o 10 väčšie od 16, ..., 924 je o 10 väčšie od 914. Čiže na prvých 900 číslach je Erikov súčet väčší o $900 \cdot 10 = 9000$. No ešte nám ostalo 901. číslo z Erikovho súčtu, ktoré sme nezaráтали, a tým je číslo 925.

Dostávame, že Erikov súčet je väčší o $9000 + 925 = 9925$.

Iné riešenie:

Viacerí ste sa na úlohu pozreli iným, rovnako dobrým spôsobom. Čísla od 25 do 914 sa nachádzajú v oboch súčtoch a teda nemajú vplyv na výsledný rozdiel. A aké čísla nám ešte ostali navyše?

V Amandinom súčte je to $15 + 16 + \dots + 24$ a v Erikovom súčte je to $915 + 916 + \dots + 925$. Erik má zjavne súčet väčší, pretože má väčšie čísla a má dokonca o jedno číslo viac. Teraz stačí už len zistiť, o koľko sa súčty líšia:

$$\begin{aligned} & (915 + 916 + \dots + 924 + 925) - (15 + 16 + \dots + 24) = \\ & = (900 + 15 + 900 + 16 + \dots + 900 + 24 + 925) - (15 + 16 + \dots + 24) = \\ & = 900 + 15 + 900 + 16 + \dots + 900 + 24 + 925 - 15 - 16 - \dots - 24 = \\ & = 10 \cdot 900 + 925 = 9925 \end{aligned}$$