SEZAMKO 2020/2021, Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Milí riešitelia,
ani sme sa nenazdali a už s vami musíme na chvíľu rozlúčiť. Opravili sme totiž poslednú sériu SEZAMKa v tomto školskom roku. S tými, ktorým sa darilo najviac, sa ale ešte lúčiť nemusíme, lebo sa s vami stretneme už onedlho na sústredení, ktoré sa uskutoční v dňoch 28. až 30. mája.
Amanda a Erik vám všetkým veľmi pekne ďakujú za všetky matematické problémy, s ktorými ste im pomohli. V septembri k vám (ak ste nám v hlavičkách písali správnu adresu) zavítajú noví rozprávkoví hrdinovia. Nechajte sa prekvapiť, kto to bude tentoraz. Pokiaľ ste už šiestaci alebo primania a SEZAMKA budúci rok podľa pravidiel nebudete môcť riešiť, nesmúťte. Väčší brat SEZAMKA, volá sa SEZAM, na Vás určite bude myslieť a pošle vám svoje zadania. Aby ste budúci rok patrili k tým najšikovnejším, nezabudnite si prečítať aj tieto vzorové riešenia…

Úspešný koniec školského roka, veľa zdravia a pekné prázdniny vám želajú organizátori SEZAMKA

Príklad č. 1 (opravovala Denisa Múthová)

Našou úlohou je zistiť, koľko najmenej krát mohla Amanda hodiť kockou, aby bolo isté, že jej aspoň dvakrát padol rovnaký počet bodiek na kockách.

Začnime tým, aký je najmenší možný súčet, ktorý Amanda mohla hodiť troma kockami. Najmenší počet bodiek na jeden stene kocky je jedna, a teda na troch kockách 1 + 1 + 1 = 3. Na druhej strane, najväčší možný počet bodiek na jednej stene kocky je šesť, a teda na troch na troch kockách 6 + 6 + 6 = 18.

Aké rôzne súčty vedela Amanda hodiť troma kockami? Všetky súčty od najmenšieho 3 až po najväčší 18. Keď si to rozpíšeme: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18. Dokopy je to 16 rôznych súčtov, ktoré Amanda mohla hodiť aspoň raz. Tým pádom, aby Amanda určite hodila jeden súčet aspoň dvakrát, musela hodiť aspoň o jeden hod viac než 16. To znamená, že Amanda musela hodiť najmenej 17-krát.

Amanda musel so svojimi troma kockami hodiť aspoň 17-krát.

Príklad č. 2 (opravovala Vierka Glevitzká)

Zo zadania vieme, že ide o súpisné číslo (číslo domu), takže bude celé. Nanuk, Sorbet a Polárka sa pozerali na to isté číslo, takže toto číslo musí mať súčasne všetky vlastnosti, ktoré psíky zistili. Poďme sa teda postupne pozrieť na tieto vlastnosti a zamyslieť sa, pre aké čísla môžu platiť.

Nanuk súpisné číslo vynásobil dvoma a po preškrtnutí jednej cifry z výsledku mu zostalo 69. Jeho dvojnásobok z ktorého škrtal teda musel byť párny, a preto sa musel končiť párnou cifrou. Cifru mohol vymazať z miesta stoviek (zľava), desiatok (zo stredu) alebo jednotiek (sprava). Ak by však škrtol cifru zľava alebo zo stredu, tak by výsledok končil cifrou 9 a preto by určite nebol párny. Z toho vyplýva, že cifru musel škrtnúť z miesta jednotiek, kde sa nachádzala párna cifra. Nanukovi teda mohli vyjsť čísla 690, 692, 694, 696 a 698. Hocijaké z čísel 345, 346, 347, 348 a 349 teda môže byť hľadané súpisné číslo. Majú však aj zvyšné dve vlastnosti?

Skúsme ich teda vynásobiť tromi:

345.3 = 1035	Vo výsledku chýba cifra 4, takže nevieme dostať 104.
346.3 = 1038	Vo výsledku chýba cifra 4, takže nevieme dostať 104.
347.3 = **104**1	Ak škrtneme poslednú cifru 1, dostaneme 104.
348.3 = **104**4	Ak škrtneme cifru 4, dostaneme 104.
349.3 = **104**7	Ak škrtneme cifru 7, dostaneme 104.

Vlastnosti, ktoré vieme od Nanuka a Sorbetu, majú iba súpisné čísla 347, 348 a 349. Poďme sa pozrieť aj na tretiu vlastnosť:

347.5 = **1**7**35**	Ak škrtneme cifru 7, dostaneme 135.
348.5 = 1740	Vo výsledku chýba cifra 3 (aj 5), takže nevieme dostať 135.
349.5 = 1745	Vo výsledku chýba cifra 3, takže nevieme dostať 135.

Na iglu bolo určite zavesené číslo 347, keďže ako jediné má všetky tri vlastnosti zo zadania.

Príklad č. 3 (opravoval Hynek Bachratý)

Desať klamárov porazilo desať poctivcov vo fotbale 21:20. Hráči o sebe povedali, že strelili 1, 3 alebo 5 gólov. Jedine futbalista Nuniq o sebe povedal, že dal góly dva, a chceme zistiť, za koho hral.

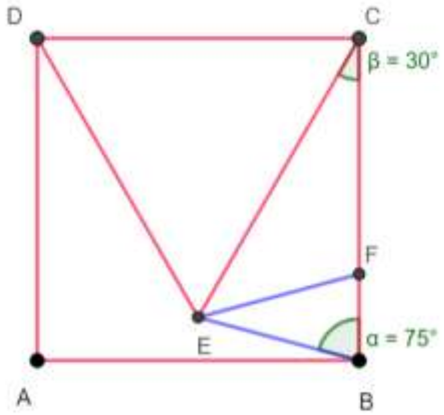
To, koľko kto gólov strelil, platí len keď to hovoria hráči - poctivci. Všetci ste preto poriadne preskúmali, ako by to bolo, ak by za nich hral aj Nuniq. Vtedy on dal naozaj 2 góly, a zvyšných 9 poctivcov malo dať zvyšných 18. A to, ako ste takmer vsetci zistili, sa nedá. Niektorí skúšali možnosti, či sá dá 18 napísať ako súčet rôznych kombinácií deviatich čísel 1, 3 alebo 5, a zistili, že žiadna nevyjde. Iní si všimli, že keď sčítavam len nepárne čísla, súčet podľa ich počtu môže byť len nepár alebo len pár. Pretože súčet deviatich nepárnych čísel je vždy nepárny, určite nemôže byť 18. Svoj postup ste ale museli vysvetliť dostatočne presne.

Keď Nuniq nemôže byť poctivec, mal by byť klamár. Túto odpoveď ste našli všetci, máte za ňu pochvalu a veľa bodov. Niektorí ale boli ešte dôkladnejší a overili, že ak je Nuniq klamár, zápas naozaj mohol skončiť 21:20. Je naozaj jasné, že potom sa dá už potrebných 20 a potrebných 21 gólov vyskladať? Čo ak náhou Nuniq vôbec nehral, alebo klamal aj poštár? Aby bolo bodovanie spravodlivé, plný počet preto dostali len tí, ktorý aj napísali možné počty gólov, ak by Nuniq hral s klamármi. Pre 10 poctivcov to mohlo byť napríklad $20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 5$. Za klamárov je možností veľa, kľudne mohol jeden klamár dať všetkých 21 gólov a ostatní žiadny. Mohli ale kľudne nastrielať napríklad aj $21 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 5$ gólov. Dva góly ale strelil niekto iný než Nuniq, ďalej jednogóloví povedali, že strelili 3 atď.

Nuniq hral za klamárov.

Príklad č. 4 (opravovala Betka Bohiniková)

Prvým krokom k úspešnému riešeniu geometrického príkladu je nakresliť si dostatočne veľký obrázok, aby sa nám doňho zmestili všetky dôležité informácie. Pomocou farieb si môžeme vyznačiť ktoré dĺžky sú rovnaké. Teraz zameriame našu pozornosť na 3 trojuholníky – CDE, BCE a CEF.



Trojuholník CDE je rovnostranný, a teda vieme, že všetky jeho uhly majú veľkosť 60°. Keďže uhol DCB je pravý, tak uhol ACE má veľkosť 30°. Z obrázku vidíme, že strany CE a BC sú rovnako dlhé. Trojuholník BCE je teda rovnoramenný a uhly CBE a CEB majú rovnakú veľkosť. Potom už len využijeme, že súčet uhlov v trojuholníku je 180° a dostávame, že veľkosť uhlov CEB a CBE je 75°. Aj trojuholník BEF je rovnoramenný. Uhol BEF má preto veľkosť 30°. A keďže poznáme aj uhol CEB, tak vieme vypočítať, že uhol CEF má veľkosť 45°.

Veľkosť uhla CEF je 45°.