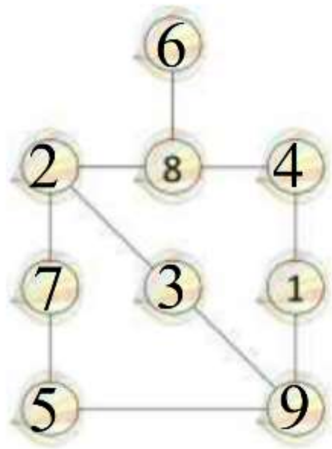
SEZAMKO 2021/2022, Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Úloha č. 1 (**opravovala Nina Benková**)



K už zapísaným cifrám 1 a 8 máme doplniť do plánika číslice 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 9 tak, aby každá bolo použitá práve raz a aby súčet čísel na každej rovnej čiare bol 14. (Pre lepšiu prehľadnosť si odporúčam plánik nakresliť a popri čítaní si do neho čísla postupne dopĺňať.)

Tak ako väčšina z vás, môžeme začať horným políčkom. Aby sme dostali súčet 14, tak tam musíme doplniť číslo 14 - 8 = 6.

Skúsme ďalej vyplniť napr. riadok, v ktorom je číslo 8. Do tohto riadka musíme ešte doplniť nejaké dve čísla. Čo o nich vieme? Ich súčet bude 14 - 8 = 6. A súčet 6 vieme nakombinovať dvoma číslami ako **1 + 5**, **2 + 4** alebo **3 + 3**.

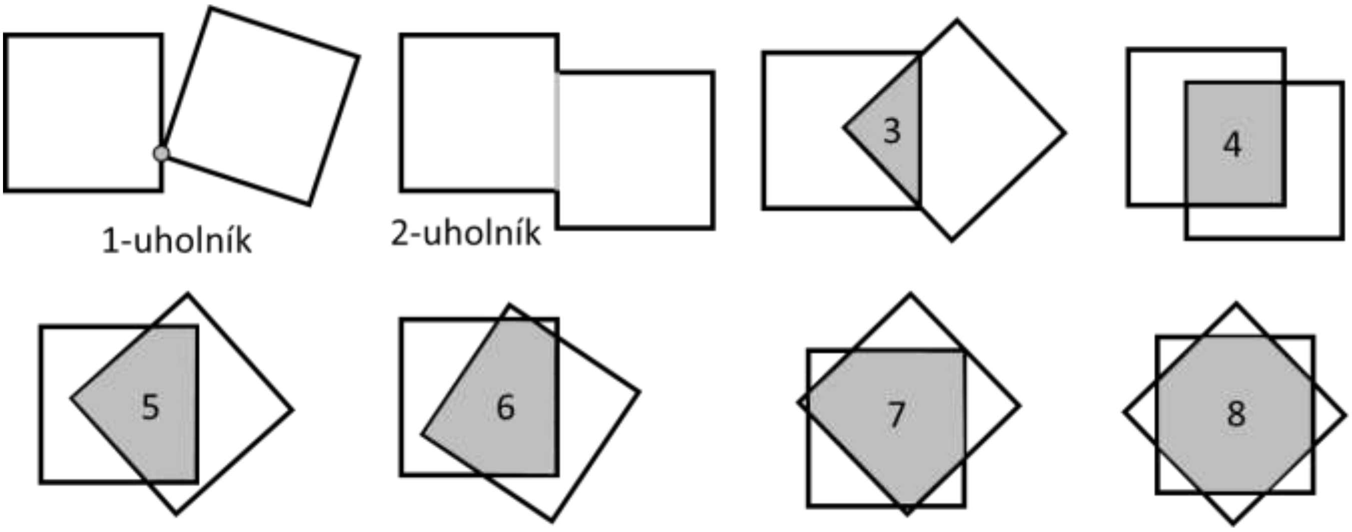
- Možnosť **1 + 5** nemožno použiť, nakoľko číslo 1 v plániku už máme.
- Možnosť **3 + 3** nevyhovuje tiež, pretože sa čísla nesmú opakovať.
- Ostala nám teda možnosť **2 + 4**. Otázkou ostáva, kam dať ktoré z čísel.
    - Skúsme dať číslo 4 vľavo od 8 a číslo 2 vpravo od 8. Pozrime sa na pravý stĺpec. Máme v ňom 2 + 1 = 3, a teda musíme vpravo dole doplniť 14 - 3 = 11. Ale 11 doplniť nevieme.
    - Čiže jediná vyhovujúca možnosť je dať číslo 2 vľavo od 8 a číslo 4 vpravo.

V pravom stĺpci máme tak súčet 4 + 1 = 5, čiže vpravo dole bude 14 - 5 = 9. Vľavo dole bude 14 - 9 = 5. Na šikmej čiare je súčet 2 + 9 = 11, doplníme teda do stredu 14 - 11 = 3. Číslo 7 doplníme do stredu ľavého stĺpca a skontrolujeme súčet. Keďže je v poriadku, máme výsledok, a z jednoznačnosti postupu vyplýva, že je jediný možný.

Iné riešenia: Úlohu išlo riešiť viacerými spôsobmi. Dalo sa začať podobne napr. pravým stĺpcom a zisťovať, ako v ňom nakombinovať súčet 14 - 1 = 13. Alebo sa dalo pozrieť na to, ako nakombinovať súčet 14 v spodnom riadku, kde sa dajú doplniť iba 2 čísla.

Úloha č. 2 (**opravovali Kika Ďuračíková a Miška Vicáňová**)

Táto úloha sa najlepšie dala riešiť tak, že si zoberieme dve naozajstné servítky a skúšame ich preložiť cez seba. Postupne vieme nájsť útvary s takýmito počtami vrcholov:



„1-uholník“ a „2-uholník“ sú trochu zvláštne „útvary”. Ak ste ich vo svojom riešení nemali, nevadí to. Ostatné útvary od 3-uholníka po 8-uholník sú dôležitejšou časťou riešenia.

Niektorí ste pekne odôvodnili aj to, prečo sa nedá urobiť viac ako 8-uholník. Servítky, ktoré na seba ukladáme, majú tvar štvorca. Štvorec má 4 strany. Dve servítky majú spolu 8 strán. **Každú stranu na servítke vieme použiť iba raz** ako nejakú stranu nášho nového útvaru. Preto **nový útvar môže mať najviac 8 strán, a teda aj 8 vrcholov**.

Úloha č. 3 ***(**opravovala Kaťa Buzáková**)***

Hľadáme číslice, ktoré môžeme dosadiť za písmenká A, B, C, D a E tak, aby platilo

$1ABCDE \cdot 3 = ABCDE1$

Teda za písmenká A až E chceme dosadiť vhodné číslice od 0 po 9. Pozrime sa na to odzadu. Súčin $E \cdot 3$ sa má končiť na číslicu 1. Keď začneme za E dosadzovať postupne číslice, zistíme, že vyhovuje jedine $3 \cdot 7 = 21$, teda **$E = 7$**.

Pri ďalšom riešení si pomôžme vypísaním násobkov čísla 3:

$0 \cdot 3 = 0$	$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 3 = 3$	$3 \cdot 3 = 9$	$4 \cdot 3 = 12$
$5 \cdot 3 = 15$	$6 \cdot 3 = 18$	$7 \cdot 3 = 21$	$8 \cdot 3 = 24$	$9 \cdot 3 = 27$

Prišli sme na to, že za E môžeme dosadiť jedine číslicu 7. Dosadením $E = 7$ do rovnosti dostávame:

$1ABCD7 \cdot 3 = ABCD71$.

$7 \cdot 3 = 21$, takže 2 sa nám zvýšili, preto pre D musí platiť, že $D \cdot 3 + 2$ končí na 7. Takže súčin $D \cdot 3$ končí na číslicu 5. Keď sa pozrieme na násobky troch zistíme, že vyhovuje jedine **$D = 5$**. Teda $D \cdot 3 + 2 = 17$.

Jedna sa nám zvýši, dosadíme $D = 5$ do rovnosti a máme:

$1ABC57 \cdot 3 = ABC571$.

Podobne pokračujeme v dopočítavaní ďalších písmen. Na mieste desiatok sa jednotka zvýšila, preto musí platiť, že $C \cdot 3 + 1$ končí na číslicu 5. Takže súčin $C \cdot 3$ končí číslicou 4. Tomu vyhovuje len **$C = 8$**, teda $8 \cdot 3 + 1 = 24$.

Po dosadení máme:

$1AB857 \cdot 3 = AB8571$.

Ideme vypočítať B. Dve sa nám zvýšili, takže $B \cdot 3 + 2$ sa končí na číslicu 8, teda $B \cdot 3$ sa končí na 6. To je len v prípade, že **$B = 2$**. Teda $B \cdot 3 + 2 = 8$.

Celkovo dostávame:

$1A2857 \cdot 3 = A28571$.

Ostáva zistiť hodnotu A. Má platiť, že súčin $A \cdot 3$ sa končí na 2, lebo v predchádzajúcom súčine sa nič nezvýšilo. To je len v prípade **$A = 4$**, teda $A \cdot 3 = 12$.

Dostávame teda $142857 \cdot 3 = 428571$.

Ešte treba overiť, že naozaj $1 \cdot 3 + 1 = 4$, teda aj na mieste stotisícok súčin platí. Môžeme to overiť aj skúškou správnosti, že sme sa naozaj nikde nepomýlili.

Treba si uvedomiť, že úloha má jediné riešenie, pretože pri dosádzaní číslic za jednotlivé písmenká sme mali vždy len jedinú možnosť.

Odpoveď: Treba dosadiť $A = 4$, $B = 2$, $C = 8$, $D = 5$ a $E = 7$.

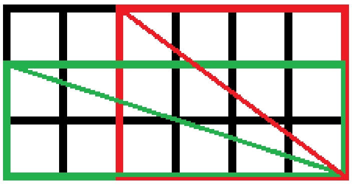
Úloha č. 4 ***(opravovala Vierka Glevitzká)***

Oba obdĺžniky máme rozdeliť na tri časti s rovnakou plochou. Kedy teda vieme, že sme jednu z týchto troch častí našli? Všetky tri majú rovnakú plochu, takže plocha jednej časti musí byť tretina plochy obdĺžnika. Obdĺžnik má 18 štvorčekov ($6 \cdot 3 = 18$), a preto jedna časť bude mať plochu 6 štvorčekov ($18 \div 3 = 6$).

Dory:

Skúsme nakresliť prvú čiaru. Potrebujeme oddeliť prvú z daných troch častí. Keďže začíname z pravého dolného rohu, tak budeme oddeľovať trojuholník s plochou 6 štvorčekov. Ako ale môžeme taký trojuholník vyrobiť?

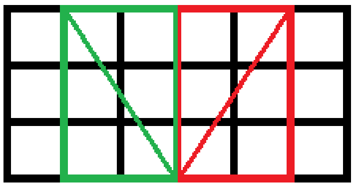
Keď v obdĺžniku alebo štvorci spojíme opačné vrcholy uhlopriečkou, rozdelíme ho na dve polovice. Takže keď nájdeme obdĺžnik s plochou 12 štvorčekov a rozdelíme ho uhlopriečkou, dostaneme trojuholník, ktorý hľadáme. V obdĺžniku zo zadania vieme nájsť dva obdĺžniky, ktoré budú v pravom dolnom rohu: 4x3 a 6x2.



Trojuholníky vpravo hore (červený) a vľavo dole (zelený) budú mať plochu 6 štvorčekov. Aj zvyšný štvoruholník v strede bude mať plochu 6 štvorčekov, keďže z obdĺžnika so 18 štvorčekmi oddelili dvakrát časť s plochou 6 štvorčekov ($18 - 6 - 6 = 6$).

Marlin:

Skúsme aj teraz využiť rozdeľovanie obdĺžnikov uhlopriečkami. Ak by sme spojili stred spodnej strany s rohmi obdĺžnika, dostali by sme dva trojuholníky (vpravo a vľavo) s plochou 4,5 štvorčeka, keďže sú polovicou štvorca 3x3. My však potrebujeme, aby všetky časti mali plochu 6 štvorčekov. Musíme ich teda zväčšiť, čo znamená, že obe čiary musia končiť na hornej strane obdĺžnika.



Keď nakreslíme do obdĺžnika čiary ako na obrázku, rozpolíme tým dva obdĺžniky rozmerov 2x3. Získame štyri trojuholníky s plochou 3 štvorčeky a dva obdĺžniky 1x3. Časti vpravo aj vľavo sa skladajú z jedného obdĺžnika a jedného trojuholníka a preto budú mať plochu 6 štvorčekov. Stredná časť sa skladá z dvoch trojuholníkov a preto má tiež plochu 6 štvorčekov. Obdĺžnik je teda rozdelený na tri časti s rovnakou plochou.

Pripomenieme ešte, že z postupu tiež vyplýva, že ide o jediné možné spôsoby rozdelenia obdĺžnikov požadovaným spôsobom.