JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXV. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2021/2022, 1. letná séria

Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravovala Maťka Gaňová)*

Najskôr si do tabuľky zapíšeme, ako sa menil počet syrov v špajze počas prvých dní roku 2022.

Dátum	1.1.	2.1.	3.1.	4.1.	5.1.	6.1.	7.1.	8.1.	9.1.	10.1.	11.1.	12.1.	13.1.
Počet syrov	1	3	9	6	18	12	15	3	9	6	18	12	15
Počet vyrobených špízov	0	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	1	2
Počet zostávajúcich syrov	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1

Môžeme si všimnúť, že zostávajúce počty syrov sa vždy po 6 dňoch začnú opakovať, tým pádom sa opakujú aj počty syrov po rozmnožení a vytvárajú 6 dňový cyklus. Tento cyklus sa bude opakovať aj po celý zvyšok roka. Aby sme zistili koľko cyklov sa nachádza v roku 2022 musíme vydeliť počet dní roku dĺžkou cyklu: 365 : 6 = 60, zv.5. V roku teda bude **60 celých** cyklov a **1 necelý** cyklus s dĺžkou 5 dní.

Za **žltý cyklus** od 1.1. do 6.1. James zarobí 0 + 0 + 1 + 0 + 2 + 1 = **4 špízy**. Za **zelený cyklus** od 7.1. do 12.1. James zarobí 2 + 0 + 1 + 0 + 2 + 1 = **6 špízov**. Každý ďalší cyklus bude rovnaký ako zelený. Žltý cyklus je ako jediný iný, keďže v jeho prvý deň (1.1.) má James len 1 syr a nie 15 ako v prvý deň zeleného cyklu. V roku teda bude 60 − 1 = **59 cyklov** takých ako zelený cyklus. Aby sme zistili koľko špízov počas nich James vyrobí, musíme vynásobiť počet cyklov počtom špízov, ktoré vyrobí za 1 cyklus: 59 · 6 = **354 špízov**.

Zostáva nám už len **posledných 5 dní** roka, ktoré budú vyzerať ako prvý až piaty deň zeleného cyklu (v tabuľke od 7.1. do 12.1.). Počas týchto 5 dní James vyrobí 2 + 0 + 1 + 0 + 2 = **5 špízov**.

Teraz sčítame koľko špízov vyrobí dokopy za rok: 4 + 354 + 5 = 363 špízov. Za každý špíz získa 1 dolár a preto za rok zarobí 363 · 1 = **363 dolárov**.

James za rok 2022 zarobí výrobou špízov 363 dolárov.

Úloha č. 2 ***(****opravovala Betka Bohiníková****)***

Otázka v tejto úlohe znela, či na základe tvrdení ktoré nám dali, vieme zistiť, kto je poctivec a kto klamár. Iba v prípade, že získame jedinú možnosť kedy pravdivosť človeka a jednotlivé výrazy dávajú zmysel, vieme s istotou určiť kto je kto. Ak dostaneme viac možností znamená to, že to nie je možné určiť na základe daných tvrdení.

Dôležité je buď ukázať logickú postupnosť na základe ktorej daný matematici musia byť pravdovravní alebo klamári, alebo prejsť všetky možnosti a vylúčiť tie z nich, ktoré nefungujú spoločne s tvrdeniami. Keby sme však vyskúšali každú kombináciu klamár/poctivec, museli by sme prejsť 32 možností. Radšej preto túto oblasť skúšania zúžime.

Dĺžka riešenia záleží aj od toho, ktoré tvrdenie si na začiatku začneme rozoberať, preto je dobré najprv porozmýšľať, a nie nutne začať hneď prvým tvrdením.

V tejto úlohe sa oplatilo začínať Epsilonom a Deltou, lebo dávali informáciu o najviac iných matematikoch. Začnime Deltou, keďže to tvrdenie bolo asi najmenej intuitívne a vyplatilo sa to asi najviac.

Ak by bola **Delta klamstvo**, znamenalo by to že Alfa, Beta a Gama musia všetky byť pravdivé. Alfa tvrdí, že Delta a Gama sú obaja klamári alebo poctivci. A keďže Alfa hovorí pravdu, Delta musí tiež hovoriť pravdu. **Avšak predpokladali sme že Delta je klamstvo a celá táto možnosť teda naráža na spor. Delta nevie byť súčasne pravda a klamstvo**. To znamená, že **Delta musí byť pravdivá.**

1. Teraz sa pozrime na **Epsilon**. Budeme predpokladať že hovorí **pravdu** (neskôr rozoberieme druhú možnosť, že by klamalo). Potom na základe pravdivosti jeho tvrdenia, dostávame, že **Alfa** a **Chí** sú **klamári**. To zatiaľ súhlasí aj s pravdivým tvrdením Delty. Zostáva teda zistiť čo je Beta. Beta hovorí: „Ak Epsilon je poctivec, tak Alfa je tiež poctivec.“ V možnosti ktorú rozoberáme zatiaľ vyplynulo, že Epsilon je poctivec, ale Alfa je klamár. To znamená že **Beta je klamár**. Po spočítaní klamárov zisťujeme že všetko sedí. Klamárov je nepár, čo súhlasí s tým že tvrdenie Chí o párnom počte klamárov nie je pravda.

V tomto momente by bolo chybou radovať sa z vyriešenia príkladu, keďže sme preskúmali iba tie možnosti, kde je Epsilon poctivec. Čo ak by ale poctivec nebol?

2. Nech je **Epsilon klamár**. Všimnime si teraz čo hovorí Beta: „Ak Epsilon je poctivec, ...“ Toto tvrdenie je pravdivé, vždy keď je Epsilon klamár, premyslite si prečo. **Beta je teda poctivec**.

   Zostáva určiť Alfa a Chí. Z nich, kvôli tomu že je Epsilon klamár, môže byť klamárom najviac jeden. Zároveň máme zatiaľ 1 klamára. Rozoberieme teda možnosť že medzi Alfa a Chí je jeden alebo žiadny klamár.

   a. To znamená, že ak z nich bude klamár jeden, celkový počet klamárov bude párny. **Chí by teda musel byť poctivec a Alfa by musel klamať.** To je však spor. Lebo je pravda že Chí a Delta sú obaja poctivci, ale zároveň má Alfa klamať.
   b. Ak by z nich nebol klamár ani jeden, **Chí aj Alfa by boli poctivci**. Máme spor s tvrdením Chí. Počet klamárov je nepárny, ale zároveň tvrdíme že Chí je klamár.

Jediná možnosť teda je, že Alfa, Beta, Chí sú klamári a Delta a Epsilon poctivci.

Úloha č. 3 (opravovala Števka Glevitzká)

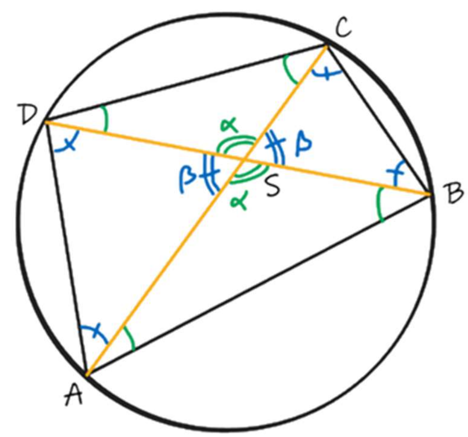
Delta objavil štvoruholníky, ktorých stred opísanej kružnice ležal na priesečníku uhlopriečok. Poďme sa pozrieť bližšie na ich vlastnosti. Načrtnime si všeobecný štvoruholník ABCD. Rovno si prikreslime aj náš významný bod – stred opísanej kružnice, ktorý je zároveň aj priesečníkom uhlopriečok. Označme si ho S.

Keďže náš bod S je stred opísanej kružnice, môžeme si všimnúť, že potom úsečky AS, BS, CS aj DS musia byť rovnako dlhé – rovné polomeru kružnice. Takže uhlopriečky nám delia štvoruholník na štyri rovnoramenné trojuholníky, a tým dostávame aj štyri dvojice zhodných uhlov. Ďalší kľúčový krok je uvedomiť si, že uhly ASB a CSD sú vrcholové a že aj uhly BSC a DSA sú vrcholové.

Môžeme sa pustiť do počítania uhlov v našom náčrte, keďže o nich už veľa vieme. Označme si veľkosť uhlov ASB a CSD ako $\boldsymbol{\alpha}$, veľkosť uhlov BSC a DSA ako $\boldsymbol{\beta}$. Rovno si môžeme všimnúť, v akom vzťahu sú $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$. Z obrázka hneď vidno, že $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{180}°$, lebo sú „vedľa seba“. Chceme to však aj poriadne zdôvodniť, tak môžeme povedať, že je to preto, že sú uhly ASB a BSC susedné.

Pokračujme v počítaní. Teraz sa môžeme pozrieť napríklad na nejaký rovnoramenný trojuholník, povedzme na trojuholník ASB. Hneď fakt, že je rovnoramenný nám dáva informáciu o uhloch, konkrétne, že uhly SAB a SBA sú rovnako veľké. Rozmyslite si, že potom vieme spočítať, že majú presne $\frac{\mathbf{180}°-\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}$. To isté môžeme spraviť pre uhly v trojuholníkoch BSC, CSD aj DSA. Skúste si to najskôr sami.

Malo by vám vyjsť, že uhly SAB, SBA, SCD a SDC majú $\frac{\mathbf{180}°-\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}$ (na obrázku zelenou) a uhly SBC, SCB, SDA a SAD majú $\frac{\mathbf{180}°-\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}}$ (na obrázku modrou s čiarkou). Z obrázku tak pekne vidno, že pri každom vrchole je jeden zelený a jeden modrý uhol, ktoré spolu tvoria celý vnútorný. Preto každý vnútorný uhol štvoruholníka má veľkosť $\frac{\mathbf{180}°-\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{180}°-\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}}$, čo je po úprave $\frac{\mathbf{360}°-(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})}{\mathbf{2}}$. Všímavý riešiteľ si tu povie, že veď už poznáme hodnotu $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$, a to $\mathbf{180}°$. Tak to dosadíme do nášho výrazu, upravíme a dostaneme tak rovných $\mathbf{90}°$.



Zistili sme tak, že **Deltove štvoruholníky majú všetky uhly pravé**. Môžete si doma rozmyslieť, že túto vlastnosť majú jedine <u>štvorce a obdĺžniky</u>.

Starší z vás mohli úlohu riešiť aj inými spôsobmi. Napríklad pomocou zhodných trojuholníkov alebo Tálesovej kružnice (tí, čo tieto pojmy poznáte, si môžete skúsiť domyslieť detaily).

Úloha č. 4 (*opravovali Timea Jakubócyová a Miška Vicáňová****)***

Vieme, že mnohobum má tvar pravidelného štvorstena so stenami očíslovanými od 1 do 4 a v balení sú dva takéto mnohobumy. Ak je súčin čísel na spodných stenách deliteľný **3**, vytrysknú **červené iskry**, ak je súčin čísel na spodných stenách deliteľný **4**, vytrysknú **žlté iskry**. Aby sme zistili, koľkokrát bude počas ohňostroja vidieť žlté iskry, a koľkokrát červené iskry, potrebujeme vedieť, aké rôzne kombinácie čísel môžu padnúť na dvoch mnohobumoch. Dostaneme tieto možnosti:

(1 1), (1 2), (1 3), (1 4) (možnosti, keď na prvom mnohobume padne číslo 1 a druhom čísla 1 až 4)

(2 1), (2 2), (2 3), (2 4) (možnosti, keď na prvom mnohobume padne číslo 2 a druhom čísla 1 až 4)

(3 1), (3 2), (3 3), (3 4) (možnosti, keď na prvom mnohobume padne číslo 3 a druhom čísla 1 až 4)

(4 1), (4 2), (4 3), (4 4) (možnosti, keď na prvom mnohobume padne číslo 4 a druhom čísla 1 až 4)

Máme spolu 16 možností a každá z nich má rovnakú šancu, že nastane. Teraz potrebujeme zistiť, pri ktorých z nich vytrysknú červené iskry, a pri ktorých vytrysknú žlté iskry.

Červené iskry vytrysknú, keď padne: (1 3), (2 3), (3 1), (3 2), (3 3), (3 4), (4 3). To je spolu **7 možností**.

Žlté iskry vytrysknú, keď padne: (1 4), (2 2), (2 4), (3 4), (4 1), (4 2), (4 3), (4 4). To je spolu **8 možností**.

Takže šanca, že po hodení jedného balenia mnohobumov vytrysknú **červené iskry** je **7/16**. (Máme 16 možností, aké čísla môžu na dvoch mnohobumoch padnúť, a z toho pri siedmich z týchto 16 možností vytrysknú červené iskry.) A šanca, že po hodení jedného balenia mnohobumov vytrysknú **žlté iskry** je **8/16**.

My však máme dokopy 100 balení. Pri každom balení máme rovnaký počet celkových možností, aké čísla môžu na dvoch mnohobumoch padnúť (16 možností), aj rovnaký počet možností, kedy vytrysknú červené iskry (7 možností), a kedy vytrysknú žlté iskry (8 možností).

Takže po hodení 100 balení približne v $100 \cdot 7/16 = 43{,}75$ prípadoch vytrysknú červené iskry. A približne v $100 \cdot 8/16 = 50$ prípadoch vytrysknú žlté iskry. **Teda častejšie by mali padať žlté iskry, preto by si Bernt mal obliecť žltý úbor.**