JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XV. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. a 6. ročník ZŠ a prímu OG

S E Z A M K O, Školský rok 2021/2022, 1. letná séria

Vzorové riešenia

Úloha č. 1 *(opravovala Vierka Glevitzká)*

Máme štyri obrazy, ktoré chceme zavesiť naspäť na stenu. Pritom však nemôžu byť vedľa seba dva obrazy, na ktorých sú šperky alebo veci rovnakej farby. Pre nás to teda znamená, že nemôžu byť vedľa seba obrazy s červenou brošňou a červeným stolom a obrazy s červenou brošňou a žltými náušnicami. Skúsme tieto obrazy nejako zavesiť.

Obraz s červenou brošňou nemôže susediť až s dvomi obrazmi, takže nám bude pri vešaní pravdepodobne robiť najväčšie problémy. Poďme sa preto pozrieť, kam by sme ho mohli zavesiť. Tento obraz môže susediť iba s obrazom, na ktorom je modrá fľaša, a preto musí byť na prvom alebo štvrtom mieste. Ak by bol na druhom alebo treťom mieste, susedil by až s dvomi obrazmi. To znamená, že aspoň jeden z jeho susedov, by bol obraz, s ktorým susediť nemôže.

Keď zavesíme obraz s červenou brošňou na prvé miesto, tak na druhom mieste musí byť obraz s modrou fľašou. Ak by tam bol nejaký iný obraz, boli by vedľa seba dva obrazy, ktoré susediť nemôžu. Na zvyšné dve miesta môžeme ľubovoľne zavesiť zvyšné dva obrazy, keďže nikdy nebudú vedľa seba dva obrazy so šperkom alebo predmetom rovnakej farby. Dostávame tak tieto dve možnosti:

brošňa fľaša náušnice stôl

brošňa fľaša stôl náušnice

Keď zavesíme obraz s červenou brošňou na štvrté miesto, tak na treťom mieste musí byť obraz s modrou fľašou. Zvyšné dva obrazy už môžeme podobne ako minule umiestniť ľubovoľne, a tak dostávame tieto dve možnosti:

stôl náušnice fľaša brošňa

náušnice stôl fľaša brošňa

Ak by nebol obraz s červenou brošňou na kraji alebo by nebol obraz s modrou fľašou vedľa neho, susedili by buď dva obrazy so šperkom alebo s červeným predmetom. Preto už ďalšie možnosti nemôžeme vytvoriť a tieto štyri spôsoby umiestnenia obrazov sú jediné možné.

Pre zaujímavosť, tento príklad sa dal pekne vyriešiť aj skúmaním, čo sa stane, keď budú jednotlivé obrazy na prvom mieste. Úvahami o tom, kde aký obraz potom môže alebo nemôže byť, sa dalo dopracovať k rovnakému riešeniu.

Úloha č. 2 (*opravoval Hynek Bachratý****)***

Tri rybky Axa, Baxa a Vaxa boli zapletené do rozhovoru, či sú z kmeňa Inkov alebo Zinkov. Rybky z rovnakého kmeňa si hovoria pravdu, z rôznych kmeňov si klamú. Vieme zistiť, z akých kmeňov sú naozaj?

Veľa z vás našlo správne a zároveň najjednoduchšie riešenie úlohy. To je založené na analýze prvej vety „Som Ink“, ktorú vraví Axa Baxe.

Ak je **Axa Ink**, tak hovorí pravdu (alebo naopak, ak hovorí prvadu, tak je Ink). Potom ale **Baxa je tiež Ink**, lebo pravdu si hovoria rybky z rovnakého kmeňa. A keď nazad Baxa Axe hovorí „Potom si s Vaxom z rovnakého kmeňa“, tiež hovorí (Ink Inkovi) pravdu, a teda aj **Vaxa je Ink**.

Ak je **Axa Zink**, tak vo svojej vete klame (alebo ak klame, tak je Zink). Keďže klame Baxe, tá je z iného kmeňa, takže **Baxa je Ink**. A teda tiež klame Axe, že je z rovnakého kmeňa ako Vaxa. Vaxa teda nie je Zink, ale naopak **Vaxa je Ink**.

Po tejto správnej úvahe niektorí napísali, že o rybkách nevieme povedať z akého sú kmeňa, lebo máme dve riešenia úlohy. To je síce pravda, ale v **oboch sú Baxa aj Vaxa Inkovia**, na čo sa teda môžeme spoľahnúť. Len **Axa môže byť jedno aj druhé**.

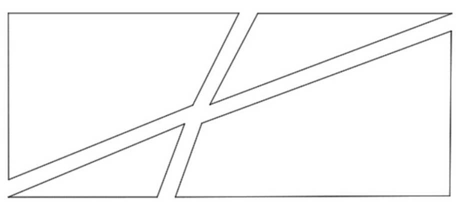
Samozrejme ste nám posleli aj iné riešenia. Dalo sa rozobrať, čí sú Axa a Baxa z rovnakých kmeňov alebo nie. Viacerí tiež správne vymysleli, že dokopy je osem možností, ako môžu tri rybky patriť do dvoch kmeňov. Vo všetkých prípadoch bolo ale treba ďalej zdôvodniť, ktoré možnosti súhlasia s vetami, ktoré rybky povedali a ktoré nie. Ak ste to spravili a dobre vysvetlili, našli ste tie isté dve riešenia a dostali plný počet bodov.

V niektorých riešeniach sa ešte vyskytla podobná nepresná úvaha, ktorou ste vylúčili riešenie „všetci sú Inkovia“. Písali ste, že keď Baxa Axe hovorí „Ste s Vaxou z rovnakého kmeňa (Inkov)“, tak klamala, lebo mala povedať, že aj ona je z rovnakého kmeňa. Ale keď poviem o niečom pravdu, nemusím povedať aj všetky ďalšie pravdy o tejto situácii. To by musela Baxa ďalej hovoriť aj o všetkých ďalších Inkoch na útese. Alebo aj vy, keď správne poviete že „1 + 1 = 2“ by ste ďalej museli pokračovať „1 + 2 = 3“, „2 + 2 = 4“ a tak ďalej.

Úloha č. 3 ***(****opravovala Gabika Ježíková****)***

Keď si kusy koláča nakreslíme, tak to vyzerá podobne ako na obrázku. Ako prvé si treba vypočítať obvod koláča, lebo aj naň Dory použila riasu. Obvod koláča je **2 · 60 + 2 · 80 = 280 cm**. Tento obvod si odčítame od použitej riasy, **620 – 280 = 340 cm**. Z obrázku vidíme, že oba rezy bolo treba ozdobiť dvakrát, aby bol koláč ozdobený na oboch stranách rezu. Vydelíme preto zvyšok riasy dvomi, **340 : 2 = 170 cm**. Našich **170 cm** je dĺžka oboch rezov. Vieme, že jeden rez je o **30 cm** dlhší ako ten druhý. Teda keď od dĺžky oboch rezov odčítame ich rozdiel, teda **30 cm**, vyjde nám dĺžka rovná dvom kratším rezom, **170 – 30 = 140 cm**. Keď chceme zistiť kratší rez, stačí nám vydeliť **140** dvomi, **140 : 2 = 70 cm**. Dlhší rez má teda dĺžku **70 + 30 = 100 cm**. Ak by sme dĺžky rezov vymenili, zistíme, že rez dlhý **70 cm** nám neprereže koláč naprieč, nakoľko je koláč dlhý až **80 cm**.

Jediným riešením sú rezy dĺžky 100 a 70 cm, pričom rez spájajúci zvislé strany koláča musí byť ten dlhší.



Ďakujeme vám za upozornenie na chybu v zadaní úlohy. Keby naozaj koláč režeme alebo rysujeme s rezmi 100 cm a 70 cm, tak nám po prekrojení nevzniknú 4 štvoruholníky, ako sme napísali v zadaní. Vznikli by nám 2 štvoruholníky a 2 trojuholníky tak, ako na obrázku.

Úloha č. 4 ***(****opravovala Iva Jančigová****)***

Objemy, ktoré môže Pocahontas svojimi džbánmi odmerať, sú troch rôznych typov. Prvé sú násobky čísla **3**. Tieto nameria tak, že bude postupne pomocou 3-litrového džbánu prilievať do 20-litrového. Takto sa dajú namerať objemy:

3 L, 6 L, 9 L, 12 L, 15 L, 18 L.

Druhú skupinu dostane tak, že naplní **20 L** džbán úplne doplna a bude z neho postupne odlievať do **3 L** džbánu. To, čo odleje, slúži len na odmeranie (vyleje to naspäť do riečky). Takto sa dajú namerať objemy:

20 L, 17 L, 14 L, 11 L, 8 L, 5 L, 2 L.

Objem **1 L** môže namerať napríklad takto (sú aj iné možné postupy): Do **20 L** džbánu postupne naleje **18 L**, potom naplní **3 L** džbán a do **20 L** doleje, koľko sa zmestí – to je presne **2 L**. Voda, ktorá jej takto ostane v **3 L** džbáne má teda objem presne **1 L**. Vodu z **20 L** džbánu teraz vyleje naspäť do riečky a preleje doňho **1 L** z trojlitrového. Postupným prilievaním po **3** litroch dostane ďalšie objemy. Takto sa dajú namerať:

1 L, 4 L, 7 L, 10 L, 13 L, 16 L, 19 L.

Môžeme si všimnúť, čo majú spoločné čísla v každej zo skupín. V prvej skupine sú čísla deliteľné tromi. V druhej sú čísla, ktoré po delení tromi dávajú zvyšok **2**. V tretej sú čísla, ktoré po delení tromi dávajú zvyšok **1**. Nie je to náhoda, keď si uvedomíme, že akonáhle vieme namerať ľubovoľné číslo, tak vieme aj číslo od neho o **3** väčšie (priliatím plného **3 L** džbánu) alebo o **3** menšie (odliatím plného **3 L** džbánu) – samozrejme od **0** do **20**. A keďže možné zvyšky po delení tromi sú práve tri (**0, 1, 2**), tak sa nám čísla rozdelili práve do týchto troch skupín.

Ešte ostáva otázka, či treba uvažovať aj s objemom 0 L? Z hľadiska nosenia vody 0 L nedáva veľký zmysel (načo by šla po vodu a potom nič nedoniesla?), ale z pohľadu matematického príkladu je to okrajový prípad, ktorý sa oplatí zvážiť.

Pocahontas vie so svojimi džbánmi namerať všetky celočíselné objemy od 0 do 20 litrov vrátane.