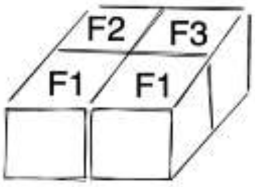
JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XV. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. a 6. ročník ZŠ a prímu OG

S E Z A M K O, Školský rok 2021/2022, 2. letná séria

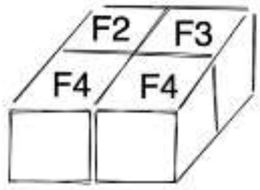
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (*opravovala Anežka Pajunková a Baška Marečáková****)***

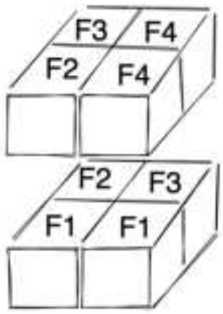
Marlin chcel použiť všetkých 8 kociek, teda 4 kocky použil na prvé poschodie a 4 kocky na druhé poschodie. Na jednej stene veľkej kocky vidíme 4 steny malých kociek. Zo zadania vieme, že majú byť presne troch rôznych farieb. To znamená, že na stene veľkej kocky bude práve jedna farba dvakrát a dve ďalšie farby.



Skúsme si, ako môže vyzerať spodné poschodie kociek. F1 až F4 sú farby kociek, ktoré použijeme. Buď môžu byť rovnaké kocky pri sebe alebo na kríž. Na obrázku vidíte uloženie pri sebe.



Druhé poschodie kocky už vieme, že musí obsahovať dve kocky poslednej farby, a zároveň platí, že kocky môžu byť vedľa seba alebo krížom. Na obrázku máme nakreslené, jedno uloženie vedľa seba. Kocky F2 a F3 sa môžu samozrejme aj vymeniť.



Teraz nám zostáva vymyslieť, ako dáme tieto dve poschodia na seba a skontrolovať, že aj na bočných stranách veľkej kocky máme vždy práve tri farby. Jedna z možností je otočiť druhé poschodie o doprava a vznikne nám výsledná kocka, ktorá spĺňa, že na všetkých stranách sú práve 3 farby.

Úloha č. 2 (*opravoval Adam Kňaze****)***

Správne riešenie sa podarilo nájsť veľkej väčšine z vás, náročnejšie však bolo zdôvodniť, že je jednoznačné, a že žiadne iné neexistuje. Poďme na to postupne. Zo zadania vieme, že keď počítala korytnačky Dory, bolo najviac modrých a najmenej hnedých, no keď ich následne spočítal Nemo, stihli sa vymeniť, a už bolo najviac hnedých a najmenej modrých. Jedinou možnou príčinou tejto zmeny sú tri špeciálne korytnačky, ktoré vedia meniť farbu. Keďže sú len tri, vieme že počty modrých a hnedých korytnačiek (tých čo sa nevedia meniť) budú pomerne blízko seba, inak by nestačili na zmenu poradia. Počet zelených korytnačiek je niekde medzi nimi, tiež teda bude podobný. Skúsme **100** korytnačiek rozdeliť na tri približne rovnako veľké skupiny:

100 : 3 = 33 zvyšok 1.

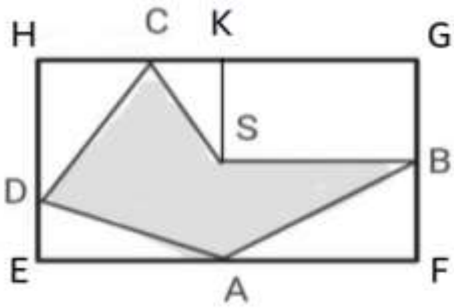
Povedzme teda, že na začiatku môže byť **33** zelených korytnačiek, **33** hnedých a **34** modrých (dáme tam ten zvyšok **1**, nech ich je najviac). Hnedých korytnačiek však musí byť menej ako zelených, zmeníme ich počet preto na **32** a ďalšiu korytnačku navyše hodíme k modrým. Dostávame počty **35** modrých, **33** zelených a **32** hnedých. To nám pasuje s tým čo videla Dory. Teraz skúsme použiť premenlivé korytnačky aby sme zmenili poradie. Ak by boli všetky tri na začiatku medzi modrými korytnačkami a potom všetky tri zmenili farbu na hnedú, nové počty budú **32** modrých, **33** zelených a **35** hnedých. Toto znovu pasuje s tým čo videl Nemo, podarilo sa nám teda nájsť vyhovujúce riešenie. Zelených korytnačiek je v oboch prípadoch **33**.

Teraz treba zistiť, či je to jediné možné riešenie. Jeden zo spôsobov je vyskúšať všetky možnosti, a keď to spravíme rozumne, ani tým nestrávime veľa času. Našli sme riešenie kde zelených korytnačiek je **33**. Skúsme najprv či ich môže byť menej. Keby máme na začiatku (keď počíta Dory) **32** zelených korytnačiek, hnedých môže byť najviac **31**. Modrých potom musí byť **37**, aby dokopy dávali **100**. Pri takýchto začiatočných počtoch však nemáme šancu zmeniť tri korytnačky tak aby bolo hnedých najviac a modrých najmenej. Keby sú aj všetky premenlivé korytnačky na začiatku modré a následne sa všetky zmenia na hnedé, aj tak by bolo hnedých a modrých prinajlepšom rovnako veľa (**34**) a nesedeli by Nemove počty zo zadania.

Skúsme teraz opačným smerom, či ich môže byť viac. Keby je pri prvom počítaní **34** zelených korytnačiek, modrých môže byť najmenej **35** a hnedých musí byť **31**. Tu znovu narazíme na podobný problém. Ak sa tri premenlivé korytnačky zmenia z modrých na hnedé, bude hnedých rovnako veľa ako zelených (**34**), a ak bola jedna z premenlivých pôvodne zelená, tak bude po zmene rovnako veľa modrých a zelených korytnačiek.

Skúsili sme či môže byť zelených korytnačiek viac alebo menej ako **33** a v oboch prípadoch sme zistili, že by to nefungovalo. Na základe toho môžeme povedať, že úloha ma jediné riešenie a zelených korytnačiek naozaj muselo byť **33**.

Úloha č. 3 ***(**opravovali Maťa Kudelčíková a Ondrej Láska**)***



Mnohí z vás si správne uvedomili, že vypočítanie plochy sivej časti chrbta Obdĺžnikovca si vieme uľahčiť, ak vypočítame plochu bielej časti, a odčítame ju od plochy celého chrbta. To jedine preto, že biela časť chrbta je "krajšia" – skladá sa z tvarov, ktorých plochu vypočítame ľahšie (pravouhlých trojuholníkov a obdĺžnika). Pri počítaní obsahov bielych častí nám pomôže jedna pomocná čiara, ktorú si do obrázka dokreslíme z bodu **S** kolmo na vrchnú hranu chrbta Obdĺžnikovca. Táto úsečka nám bude deliť veľký biely lichobežník na obdĺžnik a pravouhlý trojuholník, a jej druhý koniec označíme bodom **K**. Bod **K** tak leží v polovici strany. Pre prehľadnosť riešenia si tiež označíme vrcholy chrbta Obdĺžnikovca (u nás to budú body **E**, **F**, **G** a **H**) a dĺžky strán celého chrbta Obdĺžnikovca označíme **a** (horizontálna strana), **b** (zvislá strana).

Biele tvary sú síce krajšie ako sivá časť, no aj tak nám treba pár poznatkov na vypočítanie ich plochy. V prvom rade budeme používať vzorec na výpočet obsahu (plochy) obdĺžnika $\mathbf{S_{\square} = a \cdot b}$, kde **a**, **b** sú strany obdĺžnika. Väčšina z vás tiež správne poznamenala, že každý obdĺžnik sa dá uhlopriečkou rozdeliť na dva rovnaké pravouhlé trojuholníky. Obsah jedného z nich potom tvorí presne polovicu obsahu celého obdĺžnika. Obsah pravouhlého trojuholníka je teda $\mathbf{S_{\Delta} = S_{\square} : 2}$, takže $\mathbf{S_{\Delta} = (a \cdot b) : 2}$, kde **a**, **b** sú strany na seba kolmé.

Teraz začneme postupne počítať jednotlivé plochy bielych častí. Obdĺžnik **SBGK** má obe strany polovičnej dĺžky oproti obdĺžniku **EFGH**, čo znamená, že jeho plocha je $\mathbf{(1/2 \cdot a) \cdot (1/2 \cdot b) = 1/4 \cdot a \cdot b}$. Zo zadania vieme, že plocha celého chrbta je $\mathbf{48\ cm^2}$ (preto platí $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{48\ cm^2}$). Plocha obdĺžnika **SBGK** sa teda rovná $\mathbf{1/4 \cdot a \cdot b = 1/4 \cdot 48 cm^2 = 12 cm^2}$**.**

Keďže úsečka **AB** je uhlopriečkou obdĺžnika **AFBS**, vieme, že trojuholník **AFB** je práve polovicou tohto obdĺžnika. Bod **A** sa nachádza v polovici spodnej strany, takže obdĺžnik **AFBS** je rovnaký ako obdĺžnik **SBGK** z predošlého kroku - má teda rovnakú plochu, $\mathbf{12\ cm^2}$. Biely trojuholník **AFB** je, ako sme už uviedli jeho polovicou, takže má plochu $\mathbf{6\ cm^2}$.

Biely trojuholník **DEA** má jednu stranu rovnako dlhú ako trojuholník **AFB** (spodná strana, ktorá je polovicou **EF**) a jednu stranu polovičnej dĺžky oproti trojuholníku **AFB** (strana **DE** je len štvrtinou zvislej strany chrbta, zatiaľ čo strana **BF** je polovicou zvislej strany obdĺžnika). To znamená, že jeho plocha je polovicou plochy trojuholníka **AFB**. Plocha trojuholníka **DEA** je teda $\mathbf{6\ cm^2 : 2 = 3\ cm^2}$**.**

Strany trojuholníka **DCH** majú dĺžku jednej tretiny vodorovnej strany chrbta (strana **HC** – zo zadania) a troch štvrtín zvislej strany chrbta (vzdialenosť $\mathbf{|HD| = 1 - 1/4 = 3/4}$). Jeho plochu teda vypočítame podľa vzorca $\mathbf{S_{\Delta} = (a \cdot b) : 2}$ ako

$$\mathbf{S_{\Delta DCH} = (1/3 \cdot a) \cdot (3/4 \cdot b) : 2 = (1/4 \cdot a \cdot b) : 2 = (1/4 \cdot 48\ cm^2) : 2 = 6\ cm^2.}$$

Plochu posledného bieleho trojuholníka ktorý nám zostal - trojuholník **CKS** vypočítame tak isto cez vzorec pre pravouhlé trojuholníky $\mathbf{S_{\Delta} = (a \cdot b) : 2}$. Najprv ale musíme zistiť jeho rozmery, ktoré v zadaní neboli. Keďže bod **K** je v strede strany **GH**, dĺžka **|HK|** je rovná polovici **a**. Zo zadanie tiež vieme, že dĺžka **|HC|** je rovná jednej tretine **a**, takže vzdialenosť **|CK|** vypočítam ako $\mathbf{|CK| = |HK| - |HC| = 1/2 - 1/3 = 1/6.}$ Keďže bod **S** je stred obdĺžnika, vzdialenosť **|KS|** je rovná polovici **b**. Plocha celého trojuholníka **CKS** bude teda

$$\mathbf{S_{\Delta CKS} = (1/6 \cdot a) \cdot (1/2 \cdot b) : 2 = (1/12 \cdot a \cdot b) : 2 = (1/12 \cdot 48\ cm^2) : 2 = 2\ cm^2.}$$

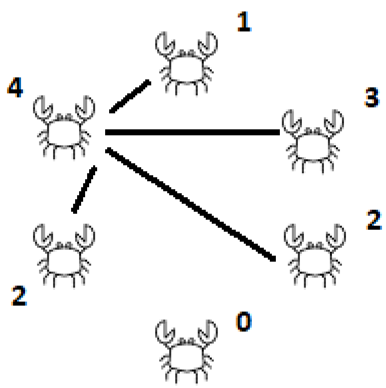
Teraz, keď máme všetky jednotlivé biele plochy vypočítané, stačí ich postupne odčítať od plochy celého chrbta **48 cm² – 12 cm² – 6 cm² – 3 cm² – 6 cm² – 2 cm² = 19 cm²**. Výsledok je celková plocha sivej časti chrbta Obdĺžnikovca.

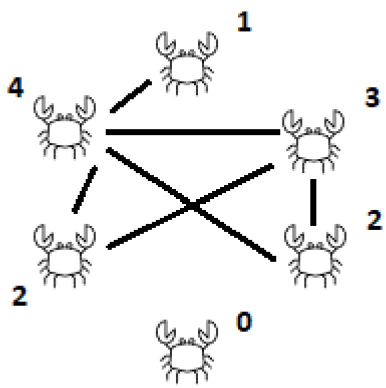
Úloha č. 4 ***(****opravovali Miro a Lenka Hudecoví****)***

Posledný krab nemohol mať **5** kamarátov, lebo by musel byť kamarát so všetkými ostatnými krabmi. Jeden z nich ale nemá žiadneho kamaráta, takže to nie je možné.

Posledný krab by mohol mať **4** kamarátov. Musíme ale ukázať, že vieme tie kamarátstva naozaj vytvoriť tak, aby nám sedeli počty. Ak má posledný krab **4** kamarátov, musí sa kamarátiť s každým krabom okrem toho, čo má **0** kamarátov. To je nakreslené na prvom obrázku - **6** krabov, posledný krab má štyroch kamarátov a každý dvaja kamaráti sú spojení čiarou. Čísla pri kraboch znázorňujú, koľko majú mať kamarátov.

Krabovi, čo má mať troch kamarátov ešte dvaja kamaráti chýbajú. Zároveň sú tu ešte dva kraby, ktorým chýba jeden kamarát. Tak ich môžeme spojiť – to je druhý obrázok. Keď sa naň teraz bližšie pozrieme, tak zistíme, že všetky kraby majú už toľko kamarátov, koľko majú mať a teda sme našli jedno riešenie.





Posledný krab nemohol mať **3** kamarátov. Kamarátstvo je vždy tvorené dvojicou. Pri vymenovávaní kamarátstiev bude teda každé kamarátstvo vymenované dvakrát a teda celkový počet vymenovaných kamarátstiev musí byť násobkom dvoch. Môžeme sa na to pozrieť aj tak, že každé kamarátstvo je tvorené úsečkou medzi dvomi krabmi a každá úsečka má dva konce, čiže celkový počet koncov bude párny. Ale **1 + 3 + 2 + 0 + 2 + 3 = 11**, čo by znamenalo, že budeme mať nepárny počet koncov.

Keďže zo zadania vieme, že posledný krab mal najmenej troch kamarátov, z toho čo sme zistili vieme povedať, že mal presne **4** kamarátov.