SEZAM, školský rok 2007/08, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
zdá sa, že detektívka o bystrej Alici, Sherlockovi Holmesovi a jeho priateľovi Watsonovi sa čoraz viac zamotáva. Naši detektívy sa stretávajú s čoraz ťažšími (hlavne matematickými) orieškami. Sme radi, že ste sa s nimi dokázali popasovať. Ako to zatiaľ vyzerá, to ľahko zistíte z poradia. Predtým než sa pustíte do nových úloh druhej série si prečítajte tieto vzorové riešenia. Dozviete sa, ako sa dali úlohy riešiť, a nabudúce podobné úlohy zvládnete lepšie.

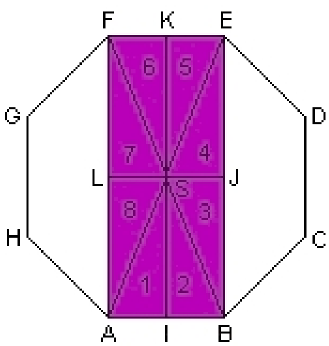
Ak máte spolužiaka alebo kamaráta, ktorý by takisto mohol riešiť SEZAM, požičajte mu svoje zadania druhej série, nech sa nad úlohami zamyslí aj on. Ak sa mu bude dariť, pozveme aj jeho na letný tábor, ktorý sa uskutoční **od 8. do 17. augusta**. A pozor, po dlhých rokoch meníme miesto našich letných táborov. Toto leto sa na vás tešíme v **Lome nad Rimavicou** blízko Detvy.

Ešte malá prosba, skontrolujte si v poradí vaše údaje. Ak by tam boli nejaké chyby, dajte nám to spolu s druhou sériou vedieť. Pokiaľ niektoré údaje chýbajú, treba poriadne vypĺňať hlavičku. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Michal Prusák.

1. príklad

(opravoval Miro a Didi Hudec)



V každej geometrickej úlohe sa najskôr oplatí nakresliť si obrázok. Osemuholník si označíme ako $ABCDEFGH$, S bude jeho stred. Body I, J, K, L sú stredy úsečiek AB, BE, EF, FA. Teraz do obrázka dokreslíme čiary, ktorými rozdelíme fialovú časť na osem trojuholníkov. Označíme si ich číslami $1, 2, \ldots, 8$. Tieto trojuholníky sú rovnaké (zhodné podľa vety *sus*). Sú totiž pravouhlé, dĺžky $|AL| = |IS| = |BJ| = |EJ| = |KS| = |FL|$ sa rovnajú a aj dĺžky $|AI| = |BI| = |LS| = |JS| = |FK| = |EK|$ sa rovnajú.

Keby sme pospájali všetky vrcholy osemuholníka so stredom, vytvorili by sme osem rovnakých rovnoramenných trojuholníkov (veta *sss* o zhodnosti trojuholníkov). Dva z nich sú trojuholníky ABS a EFS, preto je ich obsah rovný $2/8$ obsahu celého osemuholníka. Tieto dva trojuholníky sú „poskladané“ z častí 1, 2, 5 a 6, takže obsah štyroch fialových častí sú $2/8$ obsahu celého osemuholníka. Obsah všetkých ôsmich fialových častí potom tvorí $4/8 = 1/2$ obsahu celého očka. Striebro musí tvoriť druhú polovicu očka. **Takže obsah fialovej ametystovej časti je rovnaký ako obsah striebornej časti** (inak povedané plocha ametystu je 1-krát väčšia ako plocha striebra).

2. príklad

(opravoval Ondro Mikuláš)

V prvom rade si treba uvedomiť, že každý agent niekoho sleduje a je niekým sledovaný. Pustime sa do prvej časti úlohy so siedmimi agentmi. Prvý agent sleduje agenta, ktorý sleduje agenta 2 (budeme písať iba 2 namiesto 002), teda prvý agent nemôže sledovať agenta 2. To znamená, že agent 1 môže sledovať agentov 3, 4, 5, 6 alebo 7. Overením všetkých piatich možností by sme sa dopracovali k riešeniu (vyskúšajte si to).

My si ale ukážeme niečo lepšie. Vieme, že agenti sa navzájom sledujú takto:

$$\ldots \to 1 \to ? \to 2 \to \ldots,$$

šípka symbolizuje smer sledovania. Ukážeme si, že **všetci agenti musia byť v jednom „sledovacom kruhu“**. Na to nám stačí ukázať, že agent 1 je v kruhu s každým z ostatných agentov. V kruhu agenta 1 je určite agent 2, pretože agent 1 sleduje agenta, ktorý sleduje agenta 2. Potom je tam aj agent 3, keďže agent 2 sleduje toho, kto sleduje agenta 3. Podobne môžeme postupovať ďalej a vidíme, že v kruhu agenta 1 sú naozaj všetci agenti.

Skúsme vyplniť tento kruh. Začnime od agenta 1. Potom agent 2 je o dve miesta vpravo od agenta 1, agent 3 o dve miesta napravo od agenta 2 a tak ďalej:

$$\overleftarrow{1 \ \to ? \to 2 \to ? \to 3 \to ? \to 4}$$

Za agentom 4 musí ísť agent 1, pretože spolu s „vynechanými“ agentmi sme už použili všetkých siedmich. Takže pokračujeme odznova, agent 4 sleduje toho, kto sleduje agenta 5. To musí byť agent 1. Za zvyšné otázniky doplníme agentov 6 a 7 takto:

$$\overleftarrow{1 \ \to 5 \to 2 \to 6 \to 3 \to 7 \to 4}$$

Toto je jediný možný spôsob, ako sa siedmi agenti môžu sledovať (inak sa to vyplniť nedalo).

Poďme teraz na druhú časť úlohy. Rovnakým spôsobom ako pri siedmich agentoch vieme ukázať, že všetci ôsmi agenti sú v jednom kruhu. Opäť môžeme skúsiť začať od agenta 1 vypĺňať kruh:

$$\overleftarrow{1 \quad \to ? \to 2 \to ? \to 3 \to ? \to 4 \to ?}$$

Použili sme spolu s „vynechanými“ agentmi všetkých ôsmich, takže z posledného otáznika ide šípka na agenta 1. Ale na tomto mieste má byť agent 5. Totiž agent 4 sleduje toho agenta, ktorý sleduje agenta číslo 5. Vidíme, že **dvaja agenti by museli byť na tom istom mieste v kruhu**. Ale to sa nemôže stať, **osem agentov sa týmto spôsobom nemôže navzájom sledovať.**

3. príklad

(opravoval Maťo a Ajka Bachratí)

Najskôr sa trochu lepšie pozrime na naše tri podmienky. Prvá hovorí: „Každá pokladnica má tvar kvádra, pričom dĺžka každej hrany vyjadrená v decimetroch je prirodzené číslo od 1 do 10.“ Takže ako dĺžky strán budeme používať čísla od 1 do 10. Pokladnica môže byť aj kocka, ktorá je špeciálny kváder.

Druhá hovorí: „Obsah žiadnej steny kvádra nie je prvočíslo.“ Medzi číslami od 1 do 10 máme štyri prvočísla 2, 3, 5 a 7. Jednotka sa medzi prvočísla neráta, pretože má len jediného deliteľa (samu seba). Aby bol obsah steny kvádra prvočíslo, musí byť jedna hrana jednotka a jedna prvočíslo, inak by bol ich súčin zložené číslo. Takže v rozmeroch našich kvádrov nemôžu mať dve hrany zároveň dĺžku 1 a 2, 1 a 3, 1 a 5 alebo 1 a 7.

Tretia hovorí: „Žiadne dve pokladnice nemajú rovnaké rozmery, bez ohľadu na to, kde sa pokladnica otvára.“ Takže si potrebujeme dať pozor na to, aby sme do celkového počtu pokladníc nezarátali dve „rovnaké“, napríklad $2 \times 3 \times 1$ aj $3 \times 1 \times 2$. To môžeme spraviť napríklad tak, že si budeme písať rozmery pokladnice od najmenšieho po najväčší. Takže v našom príklade namiesto $2 \times 3 \times 1$ aj namiesto $3 \times 1 \times 2$ napíšeme $1 \times 2 \times 3$.

Teraz si skúsme vypísať, ako budú vyzerať povolené rozmery pokladníc s najmenšou stranou dlhou jeden decimeter:

$$\begin{array}{cccccc}
1\times1\times1 & 1\times1\times4 & 1\times1\times6 & 1\times1\times8 & 1\times1\times9 & 1\times1\times10 \\
 & 1\times4\times4 & 1\times4\times6 & 1\times4\times8 & 1\times4\times9 & 1\times4\times10 \\
 & & 1\times6\times6 & 1\times6\times8 & 1\times6\times9 & 1\times6\times10 \\
 & & & 1\times8\times8 & 1\times8\times9 & 1\times8\times10 \\
 & & & & 1\times9\times9 & 1\times9\times10 \\
 & & & & & 1\times10\times10
\end{array}$$

Iné pokladnice tu byť nemôžu, lebo by nespĺňali niektorú z podmienok ($1\times1\times2$ má prvočíselný obsah steny, $1\times8\times4$ je už zapísané ako $1 \times 4 \times 8$). **Spolu je týchto pokladníc $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.**

Pri ďalších rozmeroch si už nemusíme dávať pozor na druhú podmienku, lebo prvočíselný obsah steny vieme dostať len ako 1×prvočíslo. Pozrime sa teraz na pokladnice s najmenším rozmerom 2 decimetre. Tie už nemôžu obsahovať stranu dlhú 1 decimeter, inak by sa opakovali.

$$\begin{array}{cccccccccl}
2\times2\times2 & 2\times2\times3 & 2\times2\times4 & 2\times2\times5 & 2\times2\times6 & 2\times2\times7 & 2\times2\times8 & 2\times2\times9 & 2\times2\times10 & \text{(je ich 9)} \\
 & 2\times3\times3 & 2\times3\times4 & 2\times3\times5 & 2\times3\times6 & 2\times3\times7 & 2\times3\times8 & 2\times3\times9 & 2\times3\times10 & \text{(je ich 8)} \\
 & & & & & & & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & 2\times9\times9 & 2\times9\times10 & \text{(sú dve)} \\
 & & & & & & & & 2\times10\times10 & \text{(je jedna)}
\end{array}$$

V každom ďalšom riadku o jednu pokladnicu menej, lebo keď máme na druhom mieste napríklad rozmer 3, tak na tretie môžeme dať 3 až 10 a tak ďalej. **Spolu je takýchto pokladníc $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$.**

Pre pokladnice, ktoré majú väčší najkratší rozmer, postupujeme veľmi podobne ako pre pokladnice s najmenším rozmerom 2 decimetre. Pri 3 decimetroch to bude spolu $8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$ pokladníc, pri 4 decimetroch spolu $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ pokladníc a tak ďalej. Skončíme jedinou pokladnicou, ktorá má najkratší rozmer 10 decimetrov (pokladnica $10 \times 10 \times 10$.)

Keď sčítame výsledky pre jednotlivé rozmery najkratšej strany pokladnice, dostaneme celkový počet pokladníc $21 + 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 186$.

4. príklad

(opravoval Škrečok Prusák)

V prvom rade sa chceme ospravedlniť za tlačiarenského škriatka, ktorý spôsobil, že v zadaní sa namiesto radu *celých* čísel objavil rad *prirodzených* čísel. Spôsobilo to, že zadaná úloha nemala riešenie. Poďme však pekne po poriadku…

Prvé číslo v rade je podľa zadania jedna. Druhé číslo nepoznáme, označme si ho n ako neznáme. Podľa majordómovej podmienky je každé číslo v rade (okrem krajných) súčtom predchádzajúceho a nasledujúceho čísla v rade. Platí preto, že druhé číslo v rade n je súčtom prvého a tretieho čísla v rade. Tretie číslo v rade potom musí byť $n-1$, lebo $1+(n-1)=n$.

Pokračujme ďalej. Tretie číslo v rade je súčtom druhého a štvrtého čísla v rade. Z toho vieme vypočítať štvrté číslo v rade ako rozdiel tretieho a druhého: $(n-1)-n=-1$. **Štvrté číslo nám vyšlo -1 pri ľubovoľnom druhom čísle.** Teda keď bude druhé číslo $2,\ 47$ alebo hocičo iné, štvrté číslo bude vždy -1. No a v zadaní sa píše, že ide o rad *prirodzených* čísel, čo -1 nie je. Takže rad, ktorý bude spĺňať majordómove podmienky neexistuje.

Skúsme teraz porozmýšľať, čo by sa stalo, keby v zadaní boli namiesto *prirodzených* čísel povolené *celé* čísla. Všetko, čo sme už vyrátali, bude platiť aj teraz. Takže zatiaľ vieme, že rad vyzerá takto:

$$1,\ n,\ (n-1),\ -1,$$

kde n je neznáme celé číslo. Podobne ako predtým vyrátajme ďalšie čísla v rade. Piate číslo v rade je rozdiel štvrtého a tretieho, teda $(-1)-(n-1)=-n$. Štvrté číslo v rade je potom naozaj súčtom predchádzajúceho tretieho a nasledujúceho piateho. Šieste číslo v rade je rozdiel piateho a štvrtého, teda $(-n)-(-1)=-n+1$. Siedme číslo v rade je rozdiel šiesteho a piateho, teda $(-n+1)-(-n)=1$. Ľaľa, siedme číslo v rade je také isté ako prvé (obe čísla sú jedna). Z toho máme, že čísla v rade sa budú po šiestich opakovať takto:

$$1,\ n,\ (n-1),\ -1,-n,(-n+1).$$

Môžete sa o tom ľahko presvedčiť tak, že dorátate ešte ôsme či deviate číslo v rade. No ale keď sa čísla takto po šiestich opakujú a my chceme zistiť, ktoré čísla budú na 2008-mom a 2009-tom mieste, stačí zistiť, aký zvyšok dá 2008 po delení šiestimi. Ten zvyšok je 4, preto **na 2008-mom mieste bude to isté, čo na štvrtom, teda -1**. Na 2009-tom mieste bude to isté, čo na piatom, teda $-n$. To znamená, že toto číslo sa bude meniť podľa toho, čo dá majordóm na druhé miesto svojho radu. Ak tam dá trebárs číslo -5, na 2009-tom mieste v rade bude číslo 5.

Podarilo sa nám teda úlohu vyriešiť aj pre *celé* čísla. Všimnite si, že teraz vieme rýchlo zisťovať, čo je na ľubovoľnom mieste majordómovho radu. Stačí len zistiť zvyšok miesta po delení šiestimi. Ešte raz sa za chybu ospravedlňujeme a gratulujeme tým, ktorí ju zvládli odhaliť…

Výsledky ankety o úlohách 1. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	12	5	4	1
najmenej sa páčila	2	5	6	9
najťažšia bola	3	5	9	4
najľahšia bola	5	2	4	10