SEZAM, školský rok 2007/08, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,

Alici, Sherlockovi Holmesovi a všetkým ostatným sa podarilo úspešne vyriešiť všetky záhady a usvedčiť kúzelníka ako hlavného vinníka. Sme radi, že ste našu detektívku sledovali až do konca a že ste Alici a Sherlockovi pomáhali s matematickými orieškami, ktoré ich postretli. V septembri si v poštovej schránke určite nájdete nových rozprávkových hrdinov spolu s úlohami prvej série SEZAMu.

Dovtedy si opravte známky v škole a užívajte si letné radovánky. Ak sa vám v SEZAMe darilo, určite ste si našli v obálke aj pozvánku na letný tábor. Čaká na vás desať augustových dní plných hier, zábavy, kamarátov a popri tom, ako inak, aj trocha matematiky.

Aby vám matematické bunky do septembra úplne neodumreli, prečítajte si tieto vzorové riešenia. Dozviete sa, aké cifry boli na majordómovom papieri, ako všelijako sa dala riešiť úloha o stromoch, ako skonštruovať námestie pomocou lámp a ako sa skladá stavebnica.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za organizátorov vám čo najkratší jún a pekné slnečné letné prázdniny želá Michal Prusák.

1. úloha

(opravovala Ľubka Peprníková)

Najskôr sa pozrime, ktoré dvojice za sebou idúcich cifier mohli byť napísané na majordómovom papieri. Všetky dvojciferné čísla deliteľné 17 sú 17, 34, 51, 68 a 85. Všetky dvojciferné čísla deliteľné 23 sú 23, 46, 69 a 92. Celkovo teda môžeme použiť tieto dvojice za sebou idúcich cifier: 17, 23, 34, 46, 51, 68, 69, 85, 92.

Majordóm povedal Sherlockovi, že prvá cifra na papieri je 9. Za ňou môže nasledovať jedine cifra 2 z dvojice 92. Preto musí byť druhá cifra na majordómovom papieri 2. Podobne prídeme na to, že za 2 nasleduje 3, za 3 nasleduje 4 a za 4 nasleduje 6.

Tu nastáva menší problém, za 6 môže byť buď 8 alebo 9. Ak by tam bola cifra 8, tak by cifry za ňou na majordómovom papieri nasledovali takto: 85, 51, 17. Za cifrou 7 už ale nemôže byť nič, lebo nie je žiadne dvojciferné číslo deliteľné 17 alebo 23, ktoré by sa začínalo na 7. Potom by už na papieri za 7 nemala byť aká cifra. Preto je táto možnosť zlá. **Na majordómovom papieri musí za 6 nasledovať 9.**

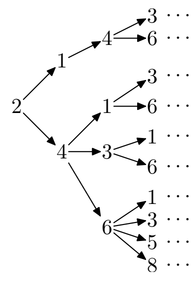
Sme znova pri cifre 9, ktorú sme mali aj na začiatku. Po nej idú opäť cifry 2346. Pätica cifier 92346 sa opakuje až skoro do konca, takže na 2005-tom mieste bude cifra 6. Za touto šestkou už ale môže byť napísaná aj cifra 8, lebo sa nestihneme dostať k miestu, z ktorého sme nemali ako pokračovať.

Zvyšné štyri cifry v rade môžu vyzerať ako . . . 685**1** alebo ako . . . 692**3**. **Na 2008-mom mieste na majordómovom papieri môžu byť cifry 1 alebo 3.**

2. úloha

(opravoval Peťo Novotný)

Po chvíli skúšania rýchlo prídeme na to, že v každej vyhovujúcej možnosti musia byť stromy s párnymi výškami (t. j. 2, 4, 6 a 8 metrov) zoradené za sebou v tomto poradí, pričom ostatné stromy (s výškami 1, 3, 5 a 7 metrov) môžu byť rôznymi spôsobmi umiestnené medzi nimi alebo za nimi. Samozrejme, aby platila podmienka zo zadania, strom vysoký 7 metrov musí byť až za 8-metrovým stromom, inak by ho bolo vidno. Podobne 5-metrový strom musí byť až za 6-metrovým, 3-metrový až za 4-metrovým a 1-metrový až za 2-metrovým.



Úlohu teraz možno vyriešiť viacerými postupmi. Jednou z možností je nakresliť postupne „rozkonárujúcu“ sa schému, ako je naznačené na obrázku. Prvý v rade musí stáť strom vysoký 2 metre. Tesne za ním musí byť buď 1-metrový strom, alebo 4-metrový strom (aby boli splnené podmienky). Ak je na druhom mieste 1-metrový strom, tesne za ním musí byť 4-metrový strom (žiadny iný sa tam nehodí). Ak je však na druhom mieste 4-metrový strom, na treťom mieste môže byť 1-, 3- alebo 6-metrový strom. Takto sa dá dokresliť celá schéma až po ôsmy strom. Na konci v pravom stĺpci spočítame, koľko je všetkých možností. Keďže ich však je až 105, ľahko sa pri tomto postupe môžeme pomýliť. Bez chyby takto úlohu vyriešila len *Adriana Santrová.*

Inou možnosťou je rozdeliť všetky prípustné spôsoby, ako mohli stromy rásť, do niekoľkých skupín, v každej skupine určiť počet spôsobov a tieto počty nakoniec sčítať. Pekne to urobila napríklad *Lucia Bohiniková.*

Prvou skupinou sú tie spôsoby, v ktorých sú všetky stromy s výškami 1, 3, 5 a 7 metrov až za 8-metrovým stromom. Keďže tieto štyri stromy môžeme za 8-metrovým stromom zoradiť ľubovoľne, máme pri tejto skupine **24** spôsobov (ľahko ich možno systematicky vypísať, ak neveríte, že ich je toľko).

	skupina	počet
1.	$2468\boxed{1357}$	24
2.	$246\mathbf{5}8\boxed{137}$	6
3.	$246\mathbf{3}8\boxed{157}$	
	$24\mathbf{3}68\boxed{157}$	12
4.	$246\mathbf{1}8\boxed{357}$	
	$24\mathbf{1}68\boxed{357}$	
	$2\mathbf{1}468\boxed{357}$	18
5.	$246\boxed{\mathbf{35}}8\boxed{17}$	
	$24\mathbf{3}6\mathbf{5}8\boxed{17}$	6
6.	$246\boxed{\mathbf{15}}8\boxed{37}$	
	$24\mathbf{1}6\mathbf{5}8\boxed{37}$	
	$2\mathbf{1}46\mathbf{5}8\boxed{37}$	8
7.	$246\boxed{\mathbf{13}}8\boxed{57}$	
	$24\boxed{\mathbf{13}}68\boxed{57}$	
	$24\mathbf{1}6\mathbf{3}8\boxed{37}$	
	$2\mathbf{1}46\mathbf{3}8\boxed{37}$	
	$2\mathbf{1}4\mathbf{3}68\boxed{37}$	
	$24\mathbf{3}6\mathbf{1}8\boxed{37}$	16
8.	$246\boxed{\mathbf{135}}87$	
	$24\mathbf{3}6\boxed{\mathbf{15}}87$	
	$24\mathbf{1}6\boxed{\mathbf{35}}87$	
	$2\mathbf{1}46\boxed{\mathbf{35}}87$	
	$24\boxed{\mathbf{13}}6\mathbf{5}87$	
	$2\mathbf{1}4\mathbf{3}6\mathbf{5}87$	15

Druhou skupinou sú spôsoby, keď sú za 8-metrovým stromom len stromy s výškami 1, 3 a 7 metrov a 5-metrový strom je medzi 6- a 8-metrovým. Tu môžeme tri stromy na konci zoradiť **6**-timi rôznymi spôsobmi.

Podobne získame tretiu skupinu, keď namiesto 5-metrového stromu presunieme dopredu 3-metrový strom. Ten však môžeme dať až na dve rôzne pozície (medzi 6- a 8- alebo medzi 4- a 6-metrový strom), získame teda až **12** spôsobov.

V štvrtej skupine dávame dopredu 1-metrový strom na tri rôzne pozície, teda získame **18** spôsobov.

Piatu skupinu tvoria tie spôsoby, v ktorých na konci za 8-metrovým stromom sú 1- a 7-metrový strom, pričom 5- a 3-metrový strom posúvame dopredu. Tu máme **6** spôsobov, lebo oba stromy na konci môžeme navzájom vymeniť a aj stromy s výškami 3 a 5 metrov môžeme navzájom vymeniť, ak sú „spolu“ medzi 6- a 8-metrovým stromom.

Šiesta skupina je podobná ako piata, len namiesto 5- a 3-metrového stromu posúvame dopredu 5- a 1-metrový. Keďže 1-metrový strom môže byť (na rozdiel od 3-metrového) aj tesne za druhým stromom, získame tu o 2 spôsoby viac, čiže **8** spôsobov.

Siedma skupina je opäť podobná ako predošlé dve, dopredu posúvame 3- a 1-metrový strom. Tu musíme dať pozor, aby sme na žiadnu možnosť nezabudli. Oba posúvané stromy môžu byť „spolu“ medzi 6- a 8-metrovým stromom alebo medzi 4- a 6-metrovým stromom (tak získame 8 spôsobov). Môžu však byť aj „samostatne“ - také možnosti sú štyri, takže získame ďalších 8 spôsobov a dokopy ich tu máme **16**.

Napokon v ôsmej skupine sú tie spôsoby, v ktorých dopredu posúvame všetky tri stromy s výškami 5, 3 a 1 meter (ako sme poznamenali v úvode, 7-metrový strom dopredu posúvať nesmieme). Ak ich dáme všetky „spolu“ medzi 6- a 8-metrový strom, získame 6 spôsobov. Ak medzi 6- a 8-metrový strom dáme iba 5- a 1-metrový strom, 3-metrový môžeme dať už len medzi 4- a 6-metrový, získame teda 2 spôsoby (5- a 1-metrový môžeme navzájom vymeniť). Ak medzi 6- a 8-metrový strom dáme iba 5- a 3-metrový strom, 1-metrový môžeme dať buď medzi 4- a 6-metrový, alebo medzi 2- a 4-metrový, získame teda 4 spôsoby (v tomto prípade môžeme navzájom vymeniť 5- a 3-metrový strom). A ak medzi 6- a 8-metrový dáme iba 5-metrový strom (ten dať viac dopredu nesmieme), tak 3- a 1-metrový strom môžeme dať buď „spolu“ medzi 4- a 6-metrový strom (čiže získame 2 spôsoby), alebo „samostatne“ 3-metrový medzi 4- a 6-metrový strom a 1-metrový medzi 2- a 4-metrový strom (tu pribudol iba 1 spôsob). Spolu v ôsmej skupine máme $6 + 2 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{15}$ spôsobov.

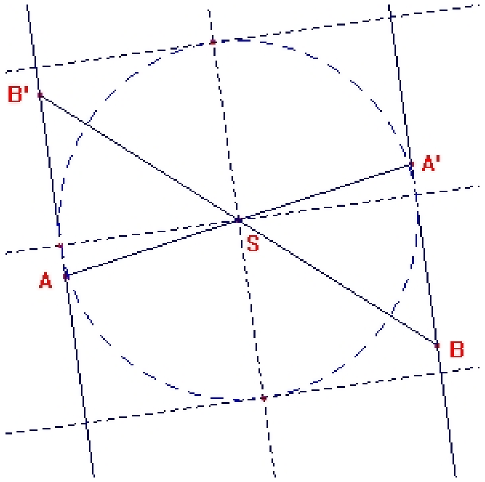
Jednotlivé skupiny a počty sú vypísané v tabuľke. Čísla znamenajú výšku stromov, pričom ak sú niektoré čísla v „rámiku“, znamená to, že ich v rámci tohto rámika môžeme ľubovoľne usporiadať a dostať tak rôzne spôsoby. Sčítaním dostávame, že všetkých spôsobov je $24 + 6 + 12 + 18 + 6 + 8 + 16 + 15 = \mathbf{105}$.

Pre tých, ktorí sa dočítali až sem, máme za odmenu ešte jeden, veľmi krátky postup. Nikto z riešiteľov ho neobjavil, veľmi blízko k nemu však bol *Ján Šubjak*. Ako sme na začiatku povedali, stromy s výškami 2, 4, 6 a 8 metrov musia byť zoradené v tomto poradí, navyše 7-metrový strom musí byť až za 8-metrovým. Poďme teraz k týmto piatim stromom pridať 5-metrový strom. Máme 3 možnosti – buď ho dáme medzi 6- a 8- metrový, alebo medzi 8- a 7- metrový strom, alebo až na koniec. Ku **každej** z týchto troch možností teraz máme práve 5 možností, kam umiestniť 3-metrový strom (vyskúšajte si to), spolu teda máme $3 \cdot 5 = 15$ možností, ako zoradiť všetky stromy okrem 1-metrového. No a pri **každej** z týchto 15 možností môžeme 1-metrový strom umiestniť na hociktoré miesto medzi už stojacimi siedmimi stromami okrem začiatku, teda na 7 rôznych pozícií (buď medzi niektoré dva stromy, alebo na koniec). Spolu teda máme $15 \cdot 7 = 105$ spôsobov, ako môžu stromy rásť.

3. úloha

(opravoval Rasťo Lenhardt)

Štvorec je stredovo súmerný útvar, čiže pre každý bod na jeho obvode vieme, že aj jeho obraz podľa stredovej súmernosti so stredom v strede štvorca sa tiež nachádza na jeho obvode. Vieme, že lampy A a B sa nachádzajú na obvode. Preto ak si nájdeme stredovo súmerný obraz lampy A, tak ten bude tiež ležať na obvode. Pomenujme si ho A'. Podobne si nájdime aj obraz lampy B a pomenujme si ho B'.



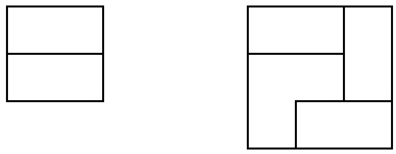
Vieme, že lampy A a B stáli na protiľahlých stranách námestia. Potom vieme, že lampa A stojí na rovnakej strane ako B', a preto je jedna strana štvorca časťou priamky určenej lampami A a B'. Podobne protiľahlá strana je časť priamky určenej lampami B a A'. Teraz už máme studňu a dve predĺžené strany námestia a chceme už len dokončiť štvorec. To už môžeme spraviť viacerými spôsobmi, napríklad využitím faktu, že studňa ako stred námestia je rovnako vzdialená od všetkých strán.

Mohlo by sa nám ešte stať, že sa nám lampa A zobrazí presne na lampu B (čiže $A' = B$). Vtedy by sme nemali dva body strany a nevedeli by sme preto nakresliť priamku, na ktorej leží strana námestia. Skúste si rozmyslieť ako všelijako by mohlo námestie vyzerať v týchto prípadoch.

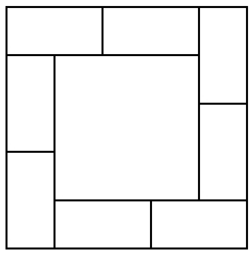
4. úloha

(opravovali Kaja Janíková a Kika Kovalčíková)

Nazvime si kúsok stavebnice z dvoch kociek *dvojkovou* stavebnicou a kúsok stavebnice z troch kociek *trojkovou* stavebnicou. Štvorec 1×1 sa nedá poskladať, naše kúsky stavebnice majú totiž rozmery väčšie ako 1×1. Poďme sa pozrieť, ako to bude vyzerať pre štvorce so stranou väčšou ako jedna. Štvorce rozmerov 2×2 a 3×3 vieme poskladať takto:



Všetky štvorce, ktoré budú mať párnu dĺžku strany, sa dajú vyskladať dvojkovými stavebnicami jednoduchým prikladaním ku „základnému“ štvorcu 2×2. Skúste si sami premyslieť, ako na to. Štvorce s nepárnou dĺžkou strany sa dajú poskladať zase tak, že okolo „základného“ štvorca 3×3 priložíme rámik z dvojkových stavebníc. Takto vznikne štvorec 5×5, ktorý obložíme podobným rámikom tak, aby vznikol štvorec 7×7.



Ostáva už len zodpovedať pár otázok. Prvá otázka je, či pri takomto prikladaní rámika bude rozmer nového väčšieho štvorca nepárny. To naozaj bude, pretože prikladáme vždy jeden riadok hore a jeden dole. Podobne prikladáme vždy jeden stĺpec naľavo a jeden napravo. No a ak k nepárnemu číslu pripočítame dva, dostaneme nepárne číslo.

Druhá otázka je, či to ide takýmto spôsobom urobiť vždy. Skúsme obložiť nejaký ľubovoľný nepárny štvorec. Začneme vedľa pravého dolného rohu. Dvojkovú stavebnicu prikladáme k pôvodnému štvorcu zvisle, až kým neprídeme k hornému pravému rohu. Keďže mala strana štvorca nepárnu dĺžku, bude nám jedno políčko prečnievať (čo presne chceme). Pokračujeme ukladaním stavebníc vodorovne sprava doľava. Začali sme presne ako predtým (stačí si štvorec otočiť o 90 stupňov), preto nám bude opäť vľavo prečnievať jedno políčko. Podobne pokračujeme po celom obvode, až kým neprídeme k „spodnému“ riadku, ktorý akurát zaplníme kvôli tomu, že strana štvorca má nepárnu dĺžku. Takýmto postupom sa určite dá obložiť štvorec s nepárnou dĺžkou strany pomocou dvojkových stavebníc. A sme hotoví, **zo stavebnice sa dajú poskladať všetky štvorce okrem 1×1.**

Výsledky ankety o úlohách 3. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	4	2	3	4
najmenej sa páčila	3	1	5	4
najťažšia bola	0	4	9	0
najľahšia bola	8	1	1	3