JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2008/09, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
pred vami sú zadania poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Príbeh kovboja Willyho a šerifky Molly sa chýli k záveru. Zároveň je to posledná šanca na získanie nejakých tých bodíkov. Oplatí sa o nich zabojovať, budete mať lepšiu pozíciu v poradí a budete sa môcť tešiť na letný tábor. Ešte predtým si prečítajte tieto vzorové riešenia, určite zistíte, prečo vaše riešenie nebolo správne, alebo sa dokonca dozviete niečo úplne nové.

Mimochodom, spomínaný letný tábor bude predbežne od 9. do 18. augusta. Naplánujte si svoje letné prázdniny tak, aby ste neminuli kopu zábavy, hier, matematiky, nových aj starých kamarátov, športu, výletov a všeličoho iného. Už teraz sa na vás tešíme... Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za organizátorov vám úspešné riešenie tretej série praje Michal Prusák.

1. príklad

(opravovala Kaja Janíková)

V zadaní nebolo napísané, koľko cifier má mať šťastné číslo. Na prvý pohľad sa preto táto úloha mohla zdať náročná. Stačilo ale nájsť nejaké hranice, medzi ktorými sa šťastné číslo musí pohybovať.

Najprv sa pozrime, ktorým najmenším číslom má zmysel sa zaoberať. **Šťastné číslo musí byť násobkom čísla 13**, inak by sa nerovnalo súčtu svojich cifier vynásobenému 13-timi. Jednoduchým odskúšaním všetkých násobkov 13 menších než 100 (teda 13, 26,..., 91) sa presvedčíme, že medzi nimi nie je žiadne šťastné číslo. Napríklad ciferný súčet 26 je 8, po vynásobení 13-timi dostaneme 104, čo je priveľa. Zistili sme, že **šťastné číslo musí byť aspoň trojciferné**.

Pozrime sa teda na trojciferné čísla, najväčšie trojciferné číslo je 999. Zároveň má aj najväčší súčet cifier $9 + 9 + 9 = 27$. Ale $27 \cdot 13 = 351$, čo znamená, že sa stačí pozerať na násobky 13 po číslo 351. Preskúmajme teda násobky trinástky, ktoré sú medzi 100 a 351 vrátane (menšie ako 100 sme už vylúčili). **Nájdeme medzi nimi tri šťastné čísla: 117, 156, 195.**

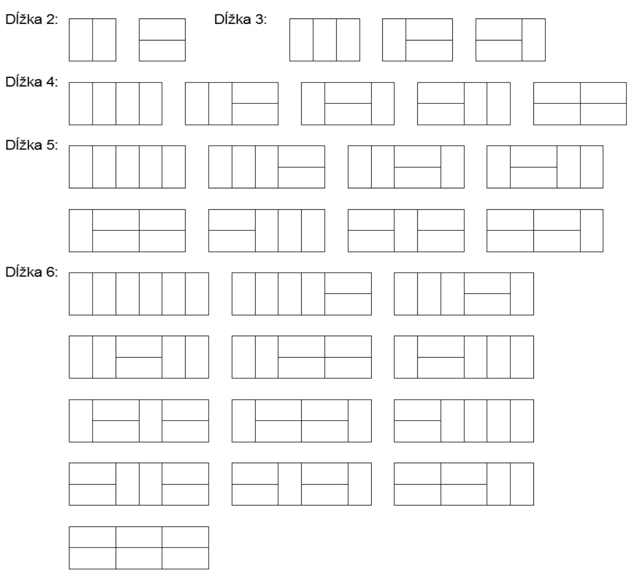
Otázne ešte je, či nemôžu byť šťastné čísla viac ako trojciferné. Skúsme postupovať rovnako: najväčšie štvorciferné číslo je 9999, jeho ciferný súčet je 36. Avšak $36 \cdot 13 = 468$, čo je iba trojciferné. Keď takto postupne pozeráme na čísla s väčším počtom cifier, najväčšie má v cifernom súčte iba jednu deviatku naviac. Preto sa od predchádzajúceho líši o $9 \cdot 13 = 117$, ale rozdiel medzi 999 a 9999 je 9000, medzi 9999 a 99999 je 90000 atď. Tento rozdiel narastá omnoho viac než o 117 a práve preto **môžeme čísla s viac ako tromi ciframi vylúčiť**.

Predsa nám ešte jedno šťastné číslo chýba, a to úplne najjednoduchšie: $0 \cdot 13 = 0$. Mnohí z vás na toto riešenie zabudli (neulovená ryba je nula ulovených rýb).

Willy skontroloval Sacajewei šťastné čísla 117, 156, 195 a upozornil ju na to, že šaman mohol uloviť aj 0 rýb (s čím však v indiánskom kmeni nepočítajú, pretože šamani sú šikovní).

2. príklad

(opravoval Jakub Daubner)



Na obrázku sú nakreslené všetky nástupištia postupne pre dĺžky 2, 3, 4, 5 a 6 metrov. Dôležité je presvedčiť sa, že sú naozaj všetky. Pre nástupištia dĺžky 2 môžeme dať buď obe dlaždice zvislo (prvá nakreslená možnosť) alebo môžeme dať obe dlaždice vodorovne (druhá možnosť). Žiadna iná ďalšia možnosť pri tejto dĺžke nie je. Keď ideme nakresliť nástupištia dĺžky tri, najskôr môžeme dať prvú dlaždicu zvislo. Za ňu môžeme dokresliť obe dláždenia, ktoré boli pre nástupište dĺžky 2 (prvá a druhá možnosť na obrázku). Druhá možnosť je dať prvé dve dlaždice vodorovne. Za nimi sa zmestí už len jedna dlaždica zvislo (tretia možnosť).

Všimnime si, že takýmto spôsobom sa dajú vykresliť všetky možné dláždenia pre nástupište ľubovoľnej dĺžky. **Najskôr nakreslíme tie možnosti, ktoré začínajú zvislou dlaždicou, a potom nakreslíme všetky možnosti, ktoré začínajú dvomi vodorovnými dlaždicami.** Keďže nástupište nijako inak začínať nemôže, týmto spôsobom určite nakreslíme všetky možnosti. Naviac si všimnime, že pri takomto spôsobe vykresľovania (najskôr nakreslíme jednu zvislú alebo dve vodorovné dlaždice) môžeme využiť už predchádzajúce nakreslené možnosti. Ak totiž nakreslíme prvú dlaždicu zvislú pre nástupištia dĺžky napríklad 4, tak za ňu môžeme dokresliť všetky možnosti pre nástupište dĺžky $4 - 1 = 3$. A ak nakreslíme prvé dve dlaždice vodorovne, tak za ne dokreslíme všetky možnosti pre nástupištia dĺžky $4 - 2 = 2$. Takisto postupujeme aj pri kreslení nástupíšť 5, 6 a 7, pričom pri kreslení vždy využijeme nakreslené možnosti pre predchádzajúce dve dĺžky nástupíšť. Pre dĺžku 7 sa sem už síce nezmestí obrázok, ale postup je úplne rovnaký.

Počty rôznych dláždení pre jednotlivé dĺžky nástupíšť sú

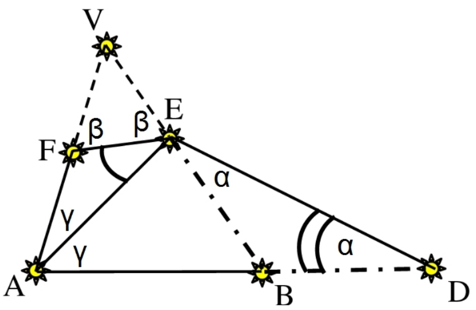
dĺžka nástupišťa	2	3	4	5	6	7
počet rôznych dláždení	2	3	5	8	13	21

Spolu je to $2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 = 52$ rôznych dláždení.

Všimnime si, že vzhľadom na postup, ktorý sme použili pri vykresľovaní, musí platiť, že počet možností pre nástupište dĺžky n je súčtom počtu možností pre predchádzajúce dve dĺžky. Napríklad pre dĺžku 7 platí $8 + 13 = 21$. Takto môžeme jednotlivé počty zistiť aj bez toho, aby sme kreslili všetky možnosti. Napríklad pre dĺžku 8 musí byť $13 + 21 = 34$ možností, pre dĺžku 9 musí byť $21 + 34 = 55$ možností, atď.

Komentár k riešeniam: Samozrejme toto nie je jediné správne riešenie. Dalo sa vykresľovať aj podľa toho, koľko je tam zvislých dlaždíc a koľko dvojíc vodorovných dlaždíc. Vždy ale treba poriadne zdôvodniť, že ste už nakreslili všetky možnosti. Takisto treba zdôvodniť aj to, že vašim spôsobom vypisovania možností naozaj nakreslíte každú možnosť a žiadnu nezopakujete.

3. príklad *(opravoval Škrečok Prusák)*



Pre zjednodušenie budeme každú hviezdu volať podľa jej začiatočného písmenka. Podľa zadania je vzdialenosť D od B rovnaká ako vzdialenosť E od B. Vďaka tomu je trojuholník DEB rovnoramenný a má rovnako veľké uhly pri základni, označme si ich α. Podobne vzdialenosť F od V je rovnako vzdialená ako E od V. Preto je aj trojuholník FEV rovnoramenný. Rovnako veľké uhly pri jeho základni si označme β. Napokon AE je osou uhla pri vrchole A, preto platí majú uhly FAE a BAE rovnakú veľkosť, tú si označíme γ.

Teraz budeme postupne počítať veľkosti rôznych uhlov. Najlepšie bude, ak si vezmete ceruzku a budete si kresliť do obrázka. V trojuholníku je súčet uhlov 180°, preto má uhol DBE veľkosť $180° - \alpha - \alpha = 180° - 2\alpha$. Uhol ABE je k nemu susedný, súčet veľkostí susedných uhlov je takisto 180°. Preto je veľkosť uhla ABE rovná $180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$. Podobne zistíme, že veľkosť uhla FVE je $180° - 2\beta$, lebo aj v trojuholníku FEV je súčet uhlov 180°. Teraz si všimnime veľký trojuholník ABV, poznáme v ňom všetky uhly. Skúsme zrátať ich súčet: $2\gamma + 2\alpha + (180° - 2\beta) = 180°$. Ak túto rovnicu trocha upravíme, odčítame 180° od oboch strán a vydelíme ju dvoma, **dostaneme z nej, že** $\gamma + \alpha = \beta$.

Všimnime si malý trojuholník AEF. Poznáme v ňom zatiaľ iba uhol FAE, ktorý má veľkosť γ. Druhý uhol AFE je susedný k EFV, preto má veľkosť $180° - \beta$. Napokon tretím je uhol AEF – to je presne ten, ktorého veľkosť chceme zistiť, označme si ho ako ?. Vďaka tomu, že súčet uhlov v trojuholníku AEF je 180°, musí platiť toto: $\gamma + (180° - \beta) + ? = 180°$. Opäť odčítame 180° od oboch strán tejto rovnice a prehodíme β na druhú stranu. **Dostali sme, že** $\gamma + ? = \beta$**.** Nepodobá sa to na niečo? Áno, podobá, pred chvíľou sme zistili, že platí $\gamma + \alpha = \beta$. Kvôli tomu je potom $? = \alpha$, podarilo sa nám teda dokázať, že **vyznačené uhly na obrázku sú rovnako veľké**. A sme hotoví. Ešte (podobne ako na záver Ezopovej bájky) dve poučenia z tohto príkladu:

Poučenie 1: Merať veľkosť uhlov v obrázku v zadaní nie je dobrý nápad. Ten obrázok totiž nie je presný. Takisto nie je dobrý nápad narysovať si vlastný obrázok a odmerať uhly v ňom. Nikto totiž nemá úplne presné rysovacie pomôcky. Ak by tie uhly neboli rovnaké, ale mali by veľkosti napríklad 28,01° a 27,99°, tak by ste to žiadnym uhlomerom nevedeli rozlíšiť. Také uhly by sa vám zdali po odmeraní úplne rovnaké, no neboli by…

Poučenie 2: Nepoužívajte veľa gréckych písmen, hlavne ak poriadne neviete, ako sa píšu. To už si radšej uhly označiť normálnymi písmenami…

4. príklad *(opravovala Lenka Trojaková)*

Na úvod si zopakujme fakty, ktoré vieme zo zadania. Molly a Willy chcú vrátiť nájdený tomahavk jeho vlastníkovi, ktorým môže byť Mandy alebo Tjuzdy. Mandy klame len v pondelok, stredu a piatok a Tjuzdy klame len v utorok, štvrtok a sobotu. Vieme ešte, že určite nie je nedeľa. Náčelníkov sa spýtali dve otázky, na ktoré im takto odpovedali:

1. otázka: **„Kto z vás stratil tomahavk?"** Prvý náčelník: **„Mandy."**
2. otázka: **„Ako sa voláš?"** Druhý náčelník: **„Volám sa Mandy."**

Poďme sa pozrieť na to, kto povedal ktorú vetu a čo po prípadnom „preložení do pravdy" jednotlivé vety znamenajú. Keďže určite nie je nedeľa, tak **klame práve jeden z oslovených náčelníkov** (okrem nedele totiž klamú striedavo po jednotlivých dňoch).

Ak klame prvý náčelník (ten v prérii), tak tomahavk nestratil Mandy, ale Tjuzdy. Druhý náčelník potom musí hovoriť pravdu, a teda je naozaj Mandy. Z toho ale vyplýva, že prvý náčelník je Tjuzdy. O ňom už z prvej vety vieme, že stratil tomahavk.

Ak klame druhý náčelník (ten v háji), tak tento náčelník sa určite nevolá Mandy. Preto sa musí volať Tjuzdy. Z toho máme, že prvý náčelník sa volá Mandy a dnes hovorí pravdu, lebo Tjuzdy klame. Takže tomahavk stratil Mandy, lebo odpovedá pravdivo na prvú otázku.

V prvom prípade tomahavk stratil Tjuzdy a v druhom Mandy, no v oboch prípadoch ho stratil náčelník v prérii. Nevieme preto, ako sa volal náčelník, ktorému patrí tomahavk, vieme ale, komu ho vrátiť. Stačí, keď sa Molly a Willy vrátia do prérie a vrátia tomahavk náčelníkovi krotiacemu kone.

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	4	3	7	6
najmenej sa páčila	2	5	9	4
najťažšia bola	1	3	13	3
najľahšia bola	4	6	3	7