JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2008/09, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí kovboji a kovbojky,
sme radi, že napriek začiatku školského roka ste nezabudli na prvú sériu SEZAMu a popasovali ste sa s úlohami. Ak chcete vedieť, ako to dopadlo, stačí si pozrieť poradie. Ak nechcete zopakovať chyby, ktoré ste urobili, alebo sa dozvedieť aj o iných spôsoboch riešenia úloh, prečítajte si tieto vzorové riešenia. Potom na vás čaká druhá séria plná nových príhod z divokého Západu. Aj keď vám možno prvá séria nevyšla podľa vašich predstáv, určite sa oplatí pokračovať. Každý príklad, ktorý sa pokúsite vyriešiť, určite zlepší vaše matematické schopnosti.

Ak máte kamarátov alebo spolužiakov, ktorí by tiež radi riešili SEZAM, skúste im požičať zadania druhej série. Ako vidno z poradia, ak budú šikovní, aj s dvomi dobre zrátanými sériami sa im môže podariť dostať sa na zimné sústredenie. Ďalej vás prosíme, aby ste si v poradí skontrolovali svoje údaje, ak sú niektoré zlé, dajte nám vedieť a opravíme ich.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`. Môžete si tam pozrieť fotky zo sústredení, prečítať si zadania a riešenia starších úloh či porozprávať sa s riešiteľmi a vedúcimi na našej nástenke...

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Michal Prusák.

1. príklad

(opravovala Ajka Bachratá)

Po chvíli skúšania si môžeme všimnúť niektoré zákonitosti. Keď si napíšeme ľubovoľné trojciferné číslo odpredu a odzadu, na mieste desiatok zostane vždy tá istá cifra. Napríklad 154 aj 451 má na mieste desiatok cifru 5. Ak potom odčítame od väčšieho čísla menšie, na mieste desiatok sa nám odčítajú rovnaké cifry. To znamená, že nám na prostrednej cifre nezáleží. Nech bude hocijaká, neovplyvní nám zaplatenú sumu, napríklad $301 - 103 = 198$ je to isté ako $311 - 113 = 198$ alebo $321 - 123 = 198$. Preto budeme ďalej ako prostrednú cifru používať len nulu, s inou prostrednou cifrou by to vyšlo tak isto.

Teraz si porovnáme cifry na mieste jednotiek a stoviek. Máme niekoľko možností, skúsme ich postupne rozobrať.

- Ak sú cifry na mieste jednotiek a stoviek rovnaké, číslo je potom odpredu aj odzadu rovnaké. Na zaplatenie vyjde suma 0, napríklad $202 - 202 = 0$. Takže 0 je jedna z hľadaných súm.
- Ak je rozdiel týchto cifier 1, máme deväť možností. Čísla $908, 807, 706, 605, 504, 403, 302, 201$ a 100. Tu na zaplatenie vždy vyjde suma 99.
- Ak je rozdiel týchto cifier 2, máme osem možností. Čísla $907, 806, 705, 604, 503, 402, 301$ a 200. Tu na zaplatenie vždy vyjde suma 198.
- Takto budeme pokračovať ďalej až po rozdiel 9, tam budeme mať už iba jednu možnosť, a to pri čísle 900. Výsledná suma na zaplatenie vtedy bude 891 (lebo $900 - 9 = 891$).

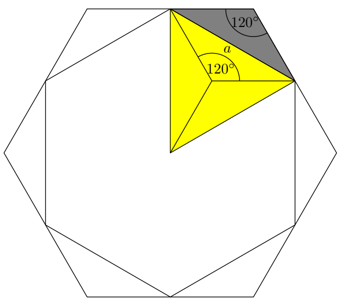
Iný rozdiel už dostať nevieme, ak sme postupovali správne, mali by sme dostať tieto sumy, ktoré sa platili pokladníkovi:

$$\mathbf{0, 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891}.$$

Riešiť sa to dalo aj inými spôsobmi. Asi najrýchlejší je pomocou desiatkového rozvoja. Ak máme trojciferné číslo $\overline{abc}$, v desiatkovom rozvoji je to $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1$ (napríklad 347 je v desiatkovom rozvoji $3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1$). Keď ho napíšeme odzadu, dostaneme $\overline{cba}$, teda $c \cdot 100 + b \cdot 10 + a \cdot 1$. Ak je a väčšie ako c, potom $\overline{abc} - \overline{cba}$ bude $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1 - c \cdot 100 - b \cdot 10 - a \cdot 1$. Po upravení dostaneme $a \cdot 99 - c \cdot 99 = 99(a - c)$. **Preto môžu byť výsledné sumy len násobky 99-tky.** Teraz treba už len zistiť, či vieme dostať hocijaký násobok 99-tky od 0 až po 891. To si už vyskúšajte sami...

2. príklad

(opravoval Jakub Daubner)



Z celej šerifskej hviezdy si stačí všimnúť jednu šestinu, ostatných päť šestín je rovnakých (pozrite si obrázok). Zlatý rovnostranný trojuholník v tejto časti rozdelíme na tri zhodné trojuholníky pomocou ťažiska ako na obrázku. Každý z týchto malých trojuholníkov je rovnoramenný a má uhly $120°$, $30°$, $30°$.

Všimnime si, že tmavý trojuholník je tiež rovnoramenný a má také isté uhly, pretože vnútorný uhol v pravidelnom šesťuholníku je $120°$. Navyše tmavý trojuholník má zhodnú stranu a so zlatými malými trojuholníkmi, a to znamená, že je s nimi zhodný.

Teraz už ľahko vidíme, že **tmavá časť zaberá $1/4$ celej hviezdy, čo sú 3 štvorcové palce a zlatá časť zaberá $3/4$ celej hviezdy, čo je 9 štvorcových palcov**.

Komentár k riešeniam: Väčšina z vás riešila úlohu podobným spôsobom. Ukázali ste, že tmavá časť je zhodná s nejakou tretinou zlatej časti. Najväčším nedostatkom pri tomto type riešení bolo, že ste zabúdali dostatočne zdôvodniť, prečo musia byť niektoré vaše nakrájané časti rovnaké.

Našlo sa aj pár pracnejších riešení, kde ste pomocou Pytagorovej vety vypočítali presné rozmery a obsahy oboch šesťuholníkov, teda celej hviezdy a zlatej časti. Pri tomto type riešení ste sa najčastejšie dopustili nejakej numerickej chyby alebo ste si zamenili jednotlivé dĺžky, ktoré ste potrebovali vypočítať.

3. príklad

(opravovala Erika Trojáková)

Našou úlohou je zistiť, aké rozmery môže mať štvorcový terč, ktorý sa dá rozdeliť na 63 štvorcov s rozmermi 1×1 cm a jeden štvorec iných rozmerov. Aby sa dali štvorce k sebe pekne priložiť, musí mať posledný štvorec celočíselný rozmer $a \times a$ (nemôže mať rozmer napríklad $2,5 \times 2,5$). Potom aj celý štvorcový terč bude mať celočíselný rozmer $b \times b$.

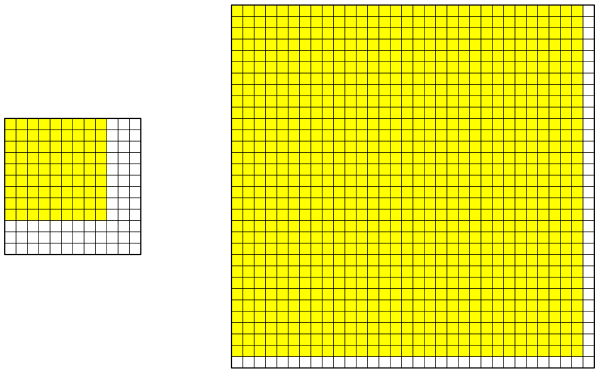
a	$P = 63 + a \cdot a$	$\sqrt{P}$
2	67	8, 18
3	72	8, 48
4	79	8, 88
9	144	12
10	163	12, 76
30	963	31, 03
31	1024	32
32	1087	32, 96

Štvorce, z ktorých sa terč skladá, majú dohromady plochu $P = 63 \cdot 1 \cdot 1 + a \cdot a$. Číslo P má byť obsahom celého štvorcového terča, takže sa musí rovnať $b \times b$. V matematickej reči to znamená, že $b = \sqrt{P}$. Toto nám stačí, aby sme začali skúšať dosadzovať za a rôzne hodnoty, vypočítali P a skúsili ho odmocniť. Ak sa to bude dať odmocniť tak, že výsledok bude celé číslo, tak sme našli vhodný rozmer terča.

V tabuľke vidíme, že pri dvoch možnostiach pre rozmer štvorca 9×9 a 31×31 cm to vyšlo. Vtedy by terče mohli vyzerať tak, ako vidíte na obrázku. V tabuľke sú len niektoré hodnoty a, doma si môžete skúsiť overiť zvyšné.

Dosadzovať za a čísla väčšie ako 31 nemá zmysel, lebo už pri hodnote 31 nám štvorčeky 1×1 vyjdú akurát na obvod.

Celý terč preto mohol mať plochu 144 alebo 1024 centimetrov štvorcových.



4. príklad

(opravoval Ondro Mikuláš)

Kovboj musí preskákať celkovo 6 schodov, pričom môže skočiť o jeden, o dva alebo o tri schody vyššie. Zahratie každej melódie teda vieme popísať postupnosťou jednotiek, dvojok a trojok. Napríklad z postupnosti $1, 2, 1, 2$ vieme vyčítať, že kovboj skákal postupne na schody 1, 3, 4 a 6. Súčet všetkých čísel v postupnosti bude 6, keďže kovboj skončil vždy na šiestom schode. Poďme preto najskôr hľadať rozklady čísla 6 na niekoľko sčítancov, ktoré sú menšie ako 4. Takých rozkladov je sedem:

1. $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
2. $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$
3. $6 = 1 + 1 + 1 + 3$
4. $6 = 1 + 1 + 2 + 2$
5. $6 = 1 + 2 + 3$
6. $6 = 2 + 2 + 2$
7. $6 = 3 + 3$

To ale neznamená, že sa dá zahrať iba 7 rôznych melódií. V každom rozklade čísla 6 ešte môžeme poprehadzovať poradie sčítancov. Tým dostaneme pre tú istú kombináciu skokov inú melódiu. V nasledujúcej tabuľke máme počet rôznych rozkladov pre každú kombináciu skokov:

Rozklad	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Rôznych kombinácií	1	5	4	6	6	1	1

Napríklad v prvom rozklade nevieme dostať inú melódiu než takú, že kovboj postupne skočí na každý schod. V druhom rozklade môžeme prehadzovať „dvojskok“ na päť rôznych miest. Buď pred ním nebude žiadna jednotka alebo pred ním bude jedna až štyri jednotky. Podobne v treťom rozklade prehadzujeme „trojskok“. Skúste si poriadne premyslieť, ako to vyjde pri ostatných rozkladoch.

Na schodoch preto celkovo vieme zahrať $1 + 5 + 4 + 6 + 6 + 1 + 1 = 24$ rôznych melódií.

Komentár k riešeniam: Vyskytli sa rôzne riešenia tejto úlohy. Niektoré sa podobali na toto, iné sa skôr sústredili na výpis všetkých možností. Vtedy je dôležité zvoliť si správny systém vypisovania, aby sa nestalo, že na nejakú možnosť zabudneme. Chcel by som pochváliť *Aďku Ječmenovú*, ktorá sa na úlohu pozrela kúsok inak a našla postup, pri ktorom vieme veľmi rýchlo povedať počet melódii aj pre väčší počet schodov.

Výsledky ankety o úlohách 1. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	7	12	4	6
najmenej sa páčila	5	8	11	5
najťažšia bola	1	12	11	5
najľahšia bola	11	5	3	10