SEZAM, školský rok 2009/10, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
pomaličky sa nám blíži koniec školského roka a prázdniny. Pred nami je už len jedna séria SEZAMu, ktorú si môžete schuti zrátať. Ak sa vám bude aspoň trošku dariť, čaká na vás letný tábor SEZAMu alebo desať dní plných zábavy, hier, matematiky a kamarátov. Tento letný tábor sa uskutoční **od 8. do 17. augusta v Bojniciach**.

Okrem toho si môžete prečítať aj vzorové riešenia úloh druhej série, za ktorú si zaslúžite pochvalu. Ak sa vám úlohy nepodarilo úplne doriešiť, dozviete sa, ako sa dalo pokračovať ďalej. A ak sa vám všetko podarilo, možno sa tu dozviete napríklad iné spôsoby riešenia úloh. . .

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za organizátorov vám úspešné riešenie tretej série praje Michal Prusák.

1. príklad

(opravovala Erika Trojáková)

Všetci ste prišli na to, že ani Oliver ani Klára si guľôčky **nemôžu vybrať správnym spôsobom**. Snažili ste sa to dokázať rôznymi spôsobmi, no niektoré mali v sebe aj chybičky. My si ukážeme správny dôkaz.

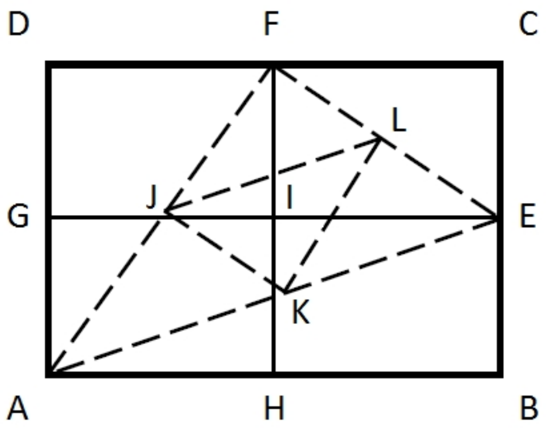
Pri skúšaní sa dalo všimnúť, že nech vyberiete guľôčky akokoľvek, tak súčet ich hodnôt je nepárne číslo. Čísla 30 aj 70 sú párne. Takže keby sme dokázali, že **súčet trinástich nepárnych čísel je vždy nepárny**, tak sme vlastne hotoví. Poďme to vyskúšať dokázať. Označme akékoľvek nepárne číslo N a akékoľvek párne číslo P. My sa snažíme sčítať 13 nepárnych čísel, inak povedané

$$N + \underline{N} + N + \underline{N} + N + \underline{N} + N + \underline{N} + N + \underline{N} + N + \underline{N} + N.$$

Určite vieme, že súčet dvoch nepárnych čísel je párny. Čiže keď sčítame $N + \underline{N}$ (obyčajné a podčiarknuté N), tak dostaneme P. Dvojíc $N + \underline{N}$ tam máme šesť, čiže keď sčítame 13 nepárnych čísel, je to akoby sme sčítali šesť P a jedno N. Súčet šiestich P je určite párny. Keď k nemu pripočítame N, výsledok je určite N, čo sme chceli ukázať. Takže Klára a Oliver nie sú unavení, ale guľôčky si takýmto spôsobom naozaj vybrať nemôžu.

2. príklad

(opravoval Janči Jakubík)



Príklad ste riešili mnohými rôznymi spôsobmi, my si ukážeme jeden z nich. Najprv si pre jednoduchšie vyjadrovanie označíme body tak ako na obrázku. Pokúsime sa teraz vypočítať obsah trojuholníka AEF. Keď si všimneme obdĺžnik $ABCD$, jeho obsah sa skladá z obsahov štyroch trojuholníkov ABE, ECF, FDA a (nami hľadaný AEF. Zo zadania vieme, že obsah obdĺžnika $ABCD$ je 160 m^2, skúsime preto vyrátať obsah troch trojuholníkov ABE, ECF a FDA.

Trojuholník ABE je polovicou obdĺžnika $ABEG$, a ten je polovicou celého veľkého obdĺžnika (keďže príslušné body ležia v strede jeho strán). Obsah trojuholníka ABE je preto štvrtina zo 160 m^2, čo je 40 m^2. Rovnaký obsah 40 m^2 bude mať aj trojuholník FDA, pretože je takisto polovicou z polovice celého obdĺžnika.

Napokon trojuholník ECF je polovicou z obdĺžnika $IECF$. Body E a F ležia v strede strán BC a CD, obdĺžnik $IECF$ je teda štvrtinou z celého obdĺžnika. Obsah trojuholníka ECF je preto osmina zo 160 m^2, čo je 20 m^2.

Z týchto údajov vieme vypočítať obsah trojuholníka AEF ako $160 - 40 - 40 - 20 = 60$ m^2.

Ak v ľubovoľnom trojuholníku pospájame stredy strán (tak ako na obrázku v trojuholníku AEF), platí, že tieto úsečky rozdelia daný trojuholník na štyri obsahovo zhodné trojuholníky. Týmto úsečkám sa tiež hovorí *stredné priečky*. Stredná priečka je úsečka, ktorá spája stredy strán trojuholníka a je rovnobežná s treťou stranou. Taktiež má polovičnú dĺžku oproti tejto strane. S týmito informáciami sa dá pomocou vety *sss* ľahko dokázať, že štyri menšie trojuholníky, ktoré nám takto vznikli, majú rovnaký obsah.

S týmito informáciami o stredných priečkach vypočítame nami hľadaný obsah trojuholníka JKL (v ktorom sedelo strašidlo) ako $60 : 4 = 15$ m^2.

3. príklad

(opravovala Kačka Bachratá)

V prvom rade musíme pochváliť všetkých, ktorí hru hrali 30-krát a zapísali, ako to dopadlo. A ani dvaja z vás neposlali rovnaké výsledky toho, ako u nich hra dopadla. Možností, ako to mohlo skončiť je totiž neúrekom.

Dala sa však vypozorovať jedna zákonitosť. Tí čo hádali rovnakú značku, ako videli na tej strane kartičky, ktorú Kláre ukázal Jupiter, tak tí vyhrávali. To si všimli mnohí z vás. A mnohí si všimli aj to, že kartičiek s rovnakými značkami na oboch stranách je dvakrát toľko, ako tých, čo majú na zadnej strane niečo iné ako vpredu. Kartičky s rovnakými znakmi sú dve a s rôznymi je iba jedna.

Keď teda bude Klára hádať, že vzadu je to isté, čo vidí vpredu, mala by byť dva razy úspešnejšia. Pri tejto stratégii by Klára mala mať pri 30 hrách 20 úspechov a 10 neúspešných hádaní.

Nakoniec už len stačilo porovnať výsledky teoretickej úvahy a vášho skutočného pokusu. Naozaj Klára vyhráva častejšie aj pri skutočných hrách? Asi áno, a asi sa to bude podobať na pomer 20:10, ale presné to nebude. Na výhru pre Kláru to však stačí.

4. príklad

(opravoval Tomáš Rizman)

Úlohou bolo nájsť všetky dvojice dvojciferných čísel, ktorých súčin je desaťnásobok ich súčtu. Označme si tieto dve čísla ako $a,\ b$. Dostaneme, že pre ne musí platiť

$$a \cdot b = 10 \cdot (a + b) = 10 \cdot a + 10 \cdot b.$$

Niektorí z vás iba vyskúšali do tejto rovnice dosadiť za a všetky dvojciferné čísla a vypočítať, či dostaneme nejaké dobré číslo b. To je ale veľmi časovo náročné a zdĺhavé, preto skúsme nájsť nejakú „skratku“.

Aby táto naša rovnica vôbec platila, musí byť súčin $a \cdot b$ deliteľný desiatimi. Na druhej strane totiž máme desaťnásobok nejakého čísla, čo je deliteľné desiatimi. **Jedno z čísel a, b preto musí byť určite deliteľné piatimi.** Ak by ani a ani b neboli deliteľné piatimi, ich súčin by určite nemohol byť deliteľný desiatimi (poriadne si rozmyslite, prečo to tak je).

Stačilo by nám teraz napríklad za a dosadiť všetky dvojciferné čísla deliteľné piatimi a vypočítať, či dostaneme vyhovujúce b. Týchto čísel $10, 15, \ldots, 90, 95$ je už len 20; čo je omnoho menej skúšania ako predtým:

a	rovnica	vypočítané b		a	rovnica	vypočítané b
10	$10 \cdot b = 100 + 10 \cdot b$	neexistuje		15	$15 \cdot b = 150 + 10 \cdot b$	30
20	$20 \cdot b = 200 + 10 \cdot b$	20		25	$25 \cdot b = 250 + 10 \cdot b$	nevyhovuje
30	$30 \cdot b = 300 + 10 \cdot b$	15		35	$35 \cdot b = 350 + 10 \cdot b$	14
40	$40 \cdot b = 400 + 10 \cdot b$	nevyhovuje		45	$45 \cdot b = 450 + 10 \cdot b$	nevyhovuje
50	$50 \cdot b = 500 + 10 \cdot b$	nevyhovuje		55	$55 \cdot b = 550 + 10 \cdot b$	nevyhovuje
60	$60 \cdot b = 600 + 10 \cdot b$	12		65	$65 \cdot b = 650 + 10 \cdot b$	nevyhovuje
70	$70 \cdot b = 700 + 10 \cdot b$	nevyhovuje		75	$75 \cdot b = 750 + 10 \cdot b$	nevyhovuje
80	$80 \cdot b = 800 + 10 \cdot b$	nevyhovuje		85	$85 \cdot b = 850 + 10 \cdot b$	nevyhovuje
90	$90 \cdot b = 900 + 10 \cdot b$	nevyhovuje		95	$95 \cdot b = 950 + 10 \cdot b$	nevyhovuje

Z tabuľky teda dostávame **päť riešení** $a = 15, b = 30$; $a = 20, b = 20$; $a = 30, b = 15$; $a = 35, b = 14$ a $a = 60, b = 12$. Ďalšie **dve riešenia** ešte dostaneme, ak vymeníme a s b (to akokeby sme skúšali v tabuľke b miesto a). Budú to riešenia $a = 14, b = 35$ a $a = 12, b = 60$.

Niektorí si skúšanie zjednodušili iným spôsobom, napriklad si všimli, že **ak sú obe čísla väčšie ako 20, tak už to nemôže fungovať**. Stačilo im potom vyskúšať dosadiť za a len čísla do 20 (ďalšie dvojice potom dostali podobne ako my vymenením a s b).

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	3	10	8	2
najmenej sa páčila	5	4	4	9
najťažšia bola	2	1	4	17
najľahšia bola	8	9	6	1