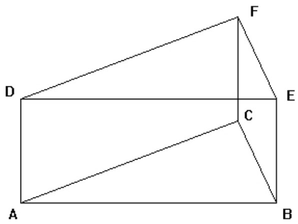
JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2010/11, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
sme radi, že nám došlo množstvo pekných riešení problémov z krajiny pána Rolanda. Ak chcete zistiť, ako ste mohli svoje riešenia napísať ešte lepšie, alebo sa dozvedieť, ako inak sa dali úlohy riešiť, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Čaká na vás tretia séria s novými príhodami panoša Athosa. Po jej úspešnom vyriešení na najlepších riešiteľov čaká zimné sústredenie (ktoré ale bude až začiatkom jara). Práve teraz je správny čas pocvičiť svoje matematické bunky poslednými štyrmi úlohami tohto polroku.
Stále prosím nezabúdajte na poctivé vypisovanie hlavičiek a vždy pošlite spolu so sériou aj spiatočnú obálku. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Denisa Múthová****)***



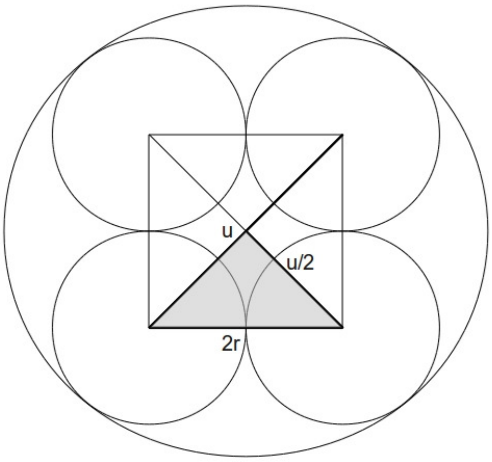
Na začiatok si označme vrcholy trojbokého hranola postupne A, B, C, D, E, F (tak ako na obrázku). Môžeme si všimnúť, že nech si zoberieme ľubovoľnú dvojicu vrcholov, tak sú buď na spoločnej hrane alebo spoločnej stenovej uhlopriečke (napríklad vrchol A má spoločnú hranu s vrcholmi B, C a D a spoločnú stenovú uhlopriečku s vrcholmi E a F). Ľahko si teda uvedomíme, že keď zoberieme ľubovoľnú trojicu rôznych vrcholov trojbokého hranola, tak trojuholník, ktorý z nich vznikne, bude spĺňať podmienky zo zadania. Stačí nám teda zistiť, koľko rôznych trojíc vrcholov vieme vybrať spomedzi vrcholov hranola. Všetky možné trojice môžeme zistiť napríklad vypísaním všetkých možností. Po vypísaní vidíme (všetky možnosti sú zaznačené v tabuľke), že **všetkých možností je 20**. Konkrétne máme 6 trojuholníkových pavučín s jednou hranou a dvoma stenovými uhlopriečkami (trojuholníky AFE, DFB, DEC, ABF, CBD, ACE), 12 trojuholníkových pavučín s dvoma hranami a jednou uhlopriečkou (ABE, AED, ABD, DBE, CBE, CEF, CBF, FBE, ACF, DAF, DAC, DCF) a 2 trojuholníkové pavučiny s troma hranami (ABC, DEF).
Pavúk mohol utkať najviac 20 sietí.

A	B	C	D	E	F
x	x	x			
x	x		x		
x	x			x	
x	x				x
x		x	x		
x		x		x	
x		x			x
x			x	x	
x			x		x
x				x	x
	x	x	x		
	x	x		x	
	x	x			x
	x		x	x	
	x		x		x
	x			x	x
		x	x	x	
		x	x		x
		x		x	x
			x	x	x

Príklad č. 2 (*opravoval Mojo Majdiš****)***

Najskôr využime to čo vieme o druhej várke rýb. Keďže každá várka vážila presne 900 uncí, tak aj 6 kaprov a 6 šťúk (čiže druhá várka) spolu váži 900 uncí. Z tretej várky vieme, že 2 zubáče a 6 šťúk spolu vážia 900 uncí. Keďže druhá aj tretia várka vážia rovnako (900 uncí), vieme, že 6 kaprov a 6 šťúk spolu váži rovnako ako 2 zubáče a 6 šťúk. Keďže 6 šťúk má v oboch várkach rovnakú hmotnosť, tak 2 zubáče vážia rovnako ako 6 kaprov, čiže **1 zubáč váži rovnako ako 3 kapre**. Z našich znalostí o druhej várke však vieme aj to, že 1 kapor a 1 šťuka spolu vážia šestinu toho čo 6 kaprov a 6 šťúk , takže šestinu 900 uncí, čo je 900 : 6 = 150 uncí. Šťuka a kapor vážia spolu 150 uncí, teda **váha šťuky je 150 uncí mínus váha kapra**.
Druhú a tretiu várku spolu tvoria 2 zubáče, 6 kaprov a 12 šťúk. Spolu vážia 1800 uncí. Všimnime si zaujímavú vec: tieto dve várky majú spolu rovnaké počty rýb aj váhu, ako dvojnásobok prvej várky. Čo nám z toho vyplýva? Zistenie, že informácia o prvej várke je nám úplne zbytočná. Ak totiž váha kaprov zubáčov a šťúk vyhovuje informáciám o druhej a tretej várke, určite vyhovuje aj tomu čo vieme o várke prvej. Inak povedané, ak sedia informácie o druhej a tretej várke, tak 2 zubáče, 6 kaprov a 12 šťúk spolu vážia 1800 uncí, čiže 1 zubáč, 3 kapri a 6 šťúk vážia spolu 900 uncí, čiže určite sedí aj informácia o prvej várke.
Avšak potom máme viac ako jedno riešenie. Ak uvažujeme len možnosti, keď sú váhy jednotlivých rýb prirodzené čísla (tu sú čísla 1, 2, 3, …), tak počet riešení je 149. Pretože ak si za váhu kapra vezmeme ľubovoľné číslo od 1 do 149, tak k nemu vieme nájsť vyhovujúce hmotnosti zubáča (trojnásobok váhy kapra) aj šťuky (150 uncí mínus váha kapra). Viac riešení nie je, pretože ak si za váhu kapra zvolíme vyššie číslo ako 149, tak váha jednej šťuky nebude prirodzené číslo (bude nulová alebo záporné číslo).
Ukázali sme, že váha jednotlivých rýb sa z informácií, ktoré sme dostali, nedá určiť jednoznačne, ale vieme, že je to určite jedno zo spomenutých riešení.

Príklad č. 3 (opravovala Kamila Štyráková)



Ako môžeme vidieť, ostrovčeky v jazierku sú rozložené pekne symetricky. (Keď cez stred jazierka nakreslíme dve na seba kolmé priamky, ktoré jazierko rozštvrtia, tak každý ostrovček je presne vložený do jednej štvrtiny jazierka.) Môžeme si všimnúť, že stredy ostrovčekov ležia vo vrcholoch štvorca. Keď sa pozrieme na jednu jeho stranu, vidíme, že sa na nej nachádza bod, v ktorom sa dva ostrovčeky dotýkajú. To znamená, že strana štvorca má dvakrát takú dĺžku ako polomer ostrovčeka, čo je 2 + 2 = 4 metre. Uhlopriečky štvorca sa pretínajú v strede jazierka, a keďže je to štvorec, tak sa rozpoľujú a zvierajú pravý uhol. Teda už vieme povedať o našom pódiu, že má tvar rovnoramenného pravouhlého trojuholníka so základňou 4. Lenže náš štvorec sa uhlopriečkami rozčlenil na 4 trojuholníky rovnaké ako naše pódium (každý z nich je pravouhlý, rovnoramenný a má základňu dlhú 4 metre), teda vieme, že **obsah pódia je štvrtina z obsahu štvorca, teda je to (4 x 4) : 4 = 4m^2**. Teraz chceme zistiť obvod pódia. Na to potrebujeme poznať dĺžky všetkých jeho strán. Už vieme, že prepona je dlhá 4 metre, a vieme, že odvesny sú rovnako dlhé a každá je polovica z uhlopriečky štvorca. Obe dokopy teda majú dĺžku jednej uhlopriečky štvorca. Tú si vieme vypočítať podľa pytagorovej vety: $u^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, teda u bude odmocnina z 32, čo je približne 5,66 metra.

Niektorí z vás ešte nepoznajú pytagorovu vetu. Teraz si teda ukážeme, ako sa dá prísť na dĺžku uhlopriečky štvorca inak. Stačí nám vedieť, že obsah trojuholníka vypočítame ako polovicu súčinu dĺžok strany a k strane prislúchajúcej výške. Náš štvorec rozpolíme uhlopriečkou *u* a vzniknú nám dva rovnaké trojuholníky, ktoré sú polovicami štvorca, teda majú obsah 8m^2. Ale my vieme, že obsah trojuholníka je $S = (u \times v_u) / 2$. Už nám stačí iba nájsť výšku kolmú na stranu u v našom trojuholníku. Vieme, že uhlopriečky štvorca sú na seba kolmé, teda polovica druhej uhlopriečky vlastne výška v našom trojuholníku, teda $v_u=u/2$. Už stačí len dosadiť:

$S = (u \times v_u) / 2=(u \times u / 2) / 2=u^2 / 4$

$S = 8 = u^2 / 4$

$u^2 = 32$ čiže u je odmocnina z 32, teda u je približne 5,66 metra.

Celý obvod je teda prepona + odvesna + odvesna = 4 m + u / 2 + u / 2 = 4 m + u = cca 9,66 metra.

Athos teda musí kúpiť 4m^2 súkna a 9,66m zlatej stuhy.

Príklad č. 4 (opravoval Miro Hudec)

Riešenie bude spočívať v tom, že nájdeme takú kombináciu odpovedí, pri ktorej bude najmenej (a potom najviac) zraniteľných hláv a potom takú pri ktorej bude najviac zraniteľných hláv (nemusia byť rovnaké!). Ukážeme tiež, že ich nemôže byť menej ani viac.

Odpovede 12 hláv si zapíšeme do tabuľky, A = áno, N = nie. Riadky predstavujú 3 otázky otázky a stĺpce hlavy.

A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N
N	N	N	A	A	A	A	A	A	A	A	A
N	N	N	A	A	A	A	A	A	N	N	N

V prvej tabuľke máme prípad, kedy žiadna z hláv neodpovedala nezmyselne – každá čo odpovedala „nie" na tretiu otázku odpovedala „nie" aj na niektorú z predošlých. Menej ako 0 zraniteľných hláv drak mať nemôže (nemôže mať záporný počet zraniteľných hláv).

A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N
N	N	N	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	A	N	N	N	N	N	N	A	A	A

V druhej tabuľke máme prípad, kedy 6 hláv odpovedalo nezmyselne – každá z hláv, čo odpovedala nie na tretiu otázku odpovedala áno na obe predošlé. Viacej ich nemôže byť, keďže presne 6 hláv odpovedalo na tretiu otázku nie.

Zraniteľných hláv teda môže byť najviac 6 a najmenej 0.

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

Úloha č.	**1**	**2**	**3**	**4**
najviac sa páčila	6	9	5	3
najmenej sa páčila	6	4	7	6
najťažšia bola	4	6	7	6
najľahšia bola	8	7	4	4