SEZAM, školský rok 2010/11, vzorové riešenia 3. zimnej série

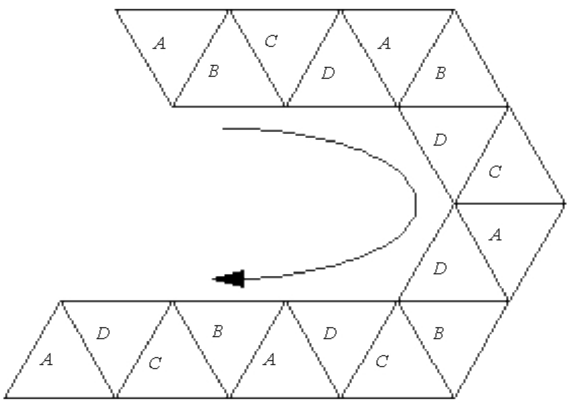
Milí riešitelia,
vo svojej poštovej schránke ste si už určite našli stredoveké príhody prvej letnej série a dúfame, že sa s nimi rytiersky popasujete. Netreba však zabúdať na poslednú sériu zimnej časti. Ak ste sa celý polrok snažili, tak vás v obálke čaká aj pozvánka na zimné sústredenie SEZAMu. Uskutoční sa od 24. do 27. marca v Trenčianskom Jastrabí neďaleko od Trenčína. Môžete sa tešiť na kopec hier, matematiky, športov, nových kamarátov a mnoho iného.
Okrem sústredenia, sa tešíme aj na vaše riešenia prvej letnej série. Ak ich chcete zrátať čo najlepšie, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravoval Janči Jakubík****)***

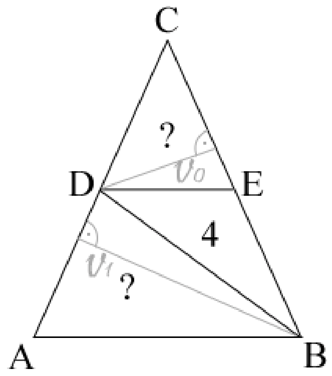
Pokúsime sa najskôr zistiť pôvodné rozmery kvádru a potom z neho odpočítať to, čo žrebec zjedol. Tým dostaneme malý kváder, ktorý zostal na konci.
Ako prvé zjedol 77 kociek cukru z hornej vrstvy kvádra. Keďže vieme, že daná vrstva má hrúbku jednej kocky, môžeme brať túto vrstvu nie ako kváder ale ako obdĺžnik. Vieme, že obsah obdĺžnika sa dá vypočítať ako súčin jeho dvoch rôznych strán. Skúsme teda zistiť aké dve strany by mohli dať súčin 77. Číslo 77 má štyroch celočíselných deliteľov a to 1, 7, 11 a 77. Ak by bola jedna strana vrchného obdĺžnika dlhá 77 kociek, druhá by musela byť dlhá 1 kocku. Tento prípad však nie je možný, pretože ak by žrebec v ďalšom kroku zjedol celú bočnú stranu, tak by už nezostalo nič. To však nie je možné pretože na konci nám zostal malý kváder. Z toho vyplýva, že obdĺžnik má rozmery 7 x 11 alebo 11 x 7. A teda žrebec po prvom jedení zjedol vrstvu s rozmermi 7 x 11 x 1 alebo 11 x 7 x 1.
Ako druhé zjedol 55 kociek cukru z bočnej steny. Vieme, že táto stena má jednu hranu spoločnú s hornou stranou (teda s tou z ktorej už žrebec zjedol 77 kociek). Musíme teda nájsť spoločného deliteľa čísel 77 a 55. Možné delitele pre číslo 77 sme už našli sú to 7 a 11. Ak číslo 55 delíme číslom 7 nedostaneme celé číslo, čo nám nevyhovuje. Ak číslo 55 delíme číslom 11 dostaneme číslo 5, čo nám vyhovuje. Teraz vieme, že kváder, ktorý vznikol po prvom zjedení mal spoločnú hranu s počtom kociek 11. Teda aj jeho rozmery boli 7 X 11 X 5.
Pri zjedení hornej vrstvy sme nezjedli iba obdĺžnik s rozmermi 7 x 11 ale kváder s rozmermi 7 x 11 x 1. Teda sme zjedením znížili výšku pôvodného kvádra o 1.
Pôvodný kváder mal preto rozmery 7 x 11 x 6 kociek. Objem pôvodného kvádra bol 462 kociek.
Teraz treba ešte spočítať koľko kociek cukru zjedol žrebec. Z úlohy vieme že zjedol 77 a 55 kociek cukru z dvoch strán. Tým, že zjedol vrchnú vrstvu 77 kociek, zmenšil výšku pôvodného kvádra zo 6 kociek na 5 kociek. Tým, že zjedol bočnú vrstvu 55 kociek, skrátil šírku kvádra zo 7 na 6. Teda po druhom jedení máme kváder s rozmermi 6 x 11 x 5. Vzniknutá predná strana (vrstva) má preto rozmery 6 x 5 x 1 kociek. Keď žrebec zje túto prednú stranu, ubudne ešte 6 x 5 = 30 kociek a skráti dĺžku kvádra z 11 na 10 kociek. Teda malý kváder ktorý vznikne na konci má rozmery 6 x 10 x 5 kociek.
Vieme už, že žrebec zjedol 77 + 55 + 30 = 162 kociek. Objem malého kvádra cukru na konci je teda 462 - 162 = 300 kociek cukru. Toto si môžeme aj overiť ak vypočítame objem malého kvádra na konci z jeho rozmerov 6 x 10 x 5 = 300 kociek cukru.

Príklad č. 2 (*opravoval Peťo Novotný****)***



Kráľov štvorsten má 4 steny. Na ornament sa každá otlačila niekoľkokrát. Aby sme mohli zistiť, koľko bodiek bolo na jednotlivých stenách, potrebujeme vedieť, koľkokrát sa otlačila ktorá stena. Najjednoduchšie je vymodelovať (napríklad z papiera) štvorsten, prevaľovať ho po zadanom obrázku a písať si, ktorá stena sa na každý trojuholník otlačila. Inou možnosťou (ak sa nám nechce modelovať štvorsten) je označiť vrcholy štvorstena štyrmi písmenami a podopĺňať ich priamo do obrázka (ak máme označený prvý trojuholník tromi písmenami, v druhom trojuholníku musíme použiť štvrté písmeno, ktoré sme v prvom nepoužili; v treťom trojuholníku zasa použijeme písmeno, ktoré chýba v druhom, atď).
Takto zistíme, že steny sa otlačia v takom poradí, ako je vyznačené na obrázku. Steny A, D sa otlačia každá 5-krát, steny B, C každá 4-krát. Rovnakými písmenami ako steny môžeme označiť aj počty bodiek na týchto stenách. Hľadáme teda vlastne štyri rôzne jednociferné čísla A, B, C, D, pre ktoré platí 5A + 5D + 4B + 4C = 137. Keď dosadíme za A, B, C, D len tak nejaké cifry, napríklad 1, 2, 3, 4, zistíme, že výsledok je o dosť menší ako 137. Preto skúsme dosadiť čo najväčšie cifry.
Pre A = 9, D = 8, B = 7, C = 6 vyjde presne 5A + 5D + 4B + 4C = 5·9 + 5·8 + 4· 7 + 4·6 = 137.
Mali sme celkom šťastie, lebo sme našli riešenie: na stenách štvorstena mohli byť čísla 6, 7, 8, 9. Ešte musíme vysvetliť, prečo iné riešenie neexistuje. To je však celkom ľahké. Súčet 137 je najväčší možný súčet (dosadili sme totiž najväčšie možné cifry za A, D, ktoré sú zarátané 5-krát, a najväčšie možné zo zvyšných cifier za B, C), preto pri každom inom dosadení (použitím inej štvorice cifier ako 6, 7, 8, 9) vyjde súčet 5A + 5D + 4B + 4C určite menší ako 137.
Počty bodiek na jednotlivých stenách štvorstena teda boli 6, 7, 8 a 9. Pri našom označení na stenách A a D boli počty 9 a 8 (alebo naopak) a na stenách B a C boli počty 7 a 6 (alebo naopak).

Príklad č. 3 (*opravoval Jurko Solčáni****)***



Zo zadania vieme, že obsah trojuholníka BED je 4 akre, čiže $S_{\Delta BED} = 4$.
Ďalej vieme, že bod E je v strede strany BC, a teda |BE|=|EC|, podobne bod D je v strede strany AC, a teda |AD|=|DC|. Keďže trojuholníky ECD a BED majú spoločnú výšku v_0 a ich strany k tejto výške prislúchajúce BE a EC majú podľa zadania rovnakú dĺžku, sú ich obsahy rovnaké(využívame vzorec na výpočet obsahu trojuholníka). $S_{\Delta DEC} = (|EC|\cdot v_0)/2 = (|BE|\cdot v_0)/2 = S_{\Delta BED} = 4$
Vieme, že keď zložíme trojuholníky BED a DEC tak dostaneme trojuholník BCD, preto platí $S_{\Delta BCD} = S_{\Delta BED} + S_{\Delta DEC} = 4 + 4 = 8$.
Podobnou úvahou ako predtým zistíme, že trojuholníky DBC a ABD majú rovnaký obsah. Majú totiž spoločnú výšku v_1 a rovnako dlhé strany AD a DC.
$S_{\Delta ABD} = (|AD|\cdot v_1)/2 = (|DC|\cdot v_1)/2 = S_{\Delta BCD} = 8$.

Obsah trojuholníkového pozemku DEC je 4 akre, obsah väčšieho trojuholníkového pozemku ABD je 8 akrov.

Príklad č. 4 (*opravovala Lenka Trojáková****)***

Cieľom tejto úlohy bolo zistiť dátum narodenia pestúnky, ktorý pozostával z ôsmych cifier – označme si ich ABCDEFGH. Poďme postupne rozoberať obmedzenia vyplývajúce zo zadania. Vieme, že pestúnka sa narodila v rokoch 1590 až 1594. Z čísel E, F, G, H sa teda bude meniť len cifra H. Dostávame, že E = 1, F = 5 a G = 9. Ak by bolo H = 1, tak dostávame rok 1591, čo však nie je prípustné kvôli opakujúcej sa cifre 1. Pestúnka sa určite nenarodila v roku 1591.
Pestúnka sa narodila v lete. Leto začína v júni (06) a končí v septembri (09). Prípustné mesiace narodenia sú teda označené dvojicou cifier 06, 07, 08 alebo 09. Takže vidíme, že C = 0. Keďže cifry sa v dátume nemôžu opakovať, tak vylúčime rok 1590 a tiež z možností pre cifru D vylúčime 9, ktorá je už použitá (G). Pre D nám ostali možnosti 6, 7 a 8 a pre H už len 2, 3 a 4.
Pozrime sa bližšie na cifru A. Každý mesiac má najviac 31 dní. Na pozícii A môžu byť teda cifry 0, 1, 2 a 3. Cifry 0 a 1 sú už použité, takže ich vylúčime. Ak by A = 3, tak B = 0 alebo B = 1. To však nenastane, lebo 0 a 1 sme už priradili iným písmenkám (C a E). Dostávame, že A = 2 a vďaka tomu môžeme vylúčiť aj rok 1592 (aby sa neopakovala cifra 2).
Dajme si to všetko dokopy. Písmenká, ktoré sme jednoznačne určili nahradíme číslami a dostávame: 2B0D195H.
Nepoužité cifry sú 3, 4, 6, 7 a 8. Z predchádzajúceho vieme, že D je 6, 7 alebo 8 a pre H nám ostali možnosti 3 a 4.
Na mieste B môže byť ľubovoľné z nepoužitých čísel.
Teraz už len treba vypísať všetky správne možnosti dátumov. Teda také, kde sa nebude opakovať žiadna cifra.
Zvoľme najskôr H = 3. Ostali nám čísla 4, 6, 7 a 8. Z nich vyskladáme dátumy:

24061593	24071593	24081593
27061593	26071593	26081593
28061593	28071593	27081593

Ľahko zrátame, že možností keď H = 3 je spolu 9.
Teraz zvoľme H = 4, dostávame tieto povolené dátumy:

23061594	23071594	23081594
27061594	26071594	26081594
28061594	28071594	27081594.

Takýchto možností je tiež spolu 9. Dohromady máme teda 18 možností dátumu narodenia, ktoré nie sú zakázané obmedzeniami v zadaní. A keďže 18 < 20, tak ak sú naši hrdinovia tak šikovní ako vy, poľahky otvoria zámok skôr, ako sa zablokuje. :)

Výsledky ankety o úlohách 3. série:

Úloha č.	**1**	**2**	**3**	**4**
najviac sa páčila	5	1	6	9
najmenej sa páčila	2	9	4	4
najťažšia bola	0	9	9	1
najľahšia bola	9	2	2	8