JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2011/12, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
rovnako ako prichádza jar, prichádzajú aj zadania druhej série letnej časti SEZAMu. Sme radi, že ste sa potrápili s príkladmi prvej letnej série. Ešte pred tým, než sa začítate do nových príbehov kapitána Piknika, si určite prečítajte tieto vzorové riešenia. Dozviete sa, ako sa vyhnúť chybám, ktoré ste možno urobili, a ak ste aj žiadnu chybu nespravili, tak sa možno dozviete nové spôsoby riešenia úloh.
Ak máte kamarátov alebo spolužiakov, ktorí by tiež radi riešili SEZAM, skúste im požičať zadania druhej série. Ak budú šikovný, tak aj s dvomi dobre zrátanými sériami sa im môže podariť dobre sa umiestniť a dostať sa na letný tábor. Ďalej vás prosíme aby ste nezabudli so svojimi riešeniami posielať aj spiatočnú obálku s nalepenými známkami a s vypísanou vašou adresou. Taktiež dbajte na poriadne vypisovanie hlavičky ku každému príkladu. Nakoniec by sme vás chceli poprosiť, aby ste si v poradí skontrolovali svoje údaje, ak sú niektoré chybné, napíšte nám a opravíme ich.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

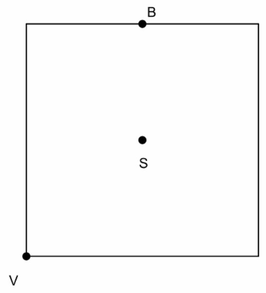
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

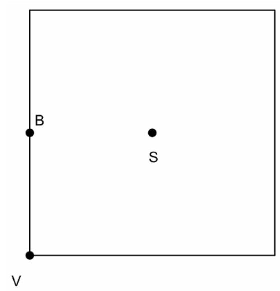
Príklad č. 1 (opravovala Lenka Trojáková)

V tomto príklade sme sa zaoberali množením žubrienok a ich nasadzovaním do jazierok. Zo zadania vieme, že máme 9 žubrienok, pričom na každé jazierko máme použiť práve 3 žubrienky. Ďalej vieme, že do prvého jazierka sa zmestí 96 žubrienok, do druhého 104 a do tretieho 144 žubrienok. Zároveň musíme nasadzovať žubrienky tak, aby sa mohli množiť, až kým nedosiahnu požadovanú kapacitu. Ako sa z týchto informácií dopracovať k postupu, ako nasadzovať žubrienky?
Je zjavné, že čím skôr dáme niektorú žubrienku do jazierka, tým viac žubrienok sa z nej namnoží. Preto ak chceme zaplniť jazierka čo najskôr, treba dávať žubrienky do jazierok čím skôr.
Vieme, koľko žubrienok má byť v jazierku na konci. Ako z toho zistiť, ako ich tam dať na začiatku? Nebudeme príliš nároční a skúsime najskôr zistiť, koľko žubrienok bolo v prvom jazierku pred posledným množením. Na konci ich tam chceme mať 96. Keďže jedna žubrienka sa vie rozdeliť na dve, pred posledným množením sme ich tam mali 96 : 2 = 48. Koľko ich tam bolo v predchádzajúcich dňoch?
48 : 2 = 24 -> 24 : 2 = 12 -> 12 : 2 = 6 -> 6 : 2 = 3. Tu už nevieme deliť dalej, ale ani nepotrebujeme, lebo máme tri žubrienky na nasadenie. Urobme si skúšku množenia žubrienok:
Na začiatku dáme ráno do jazierka 3 žubrienky, na obed ich tam bude 6, ďalší deň 12, potom 24, 48 a nakoniec 96. Potrebovali sme na to 5 dní.
Pustime sa teraz do druhého jazierka. Na konci v ňom má byť 104 žubrienok. To znamená, že pred posledným delením ich tam bude 104 : 2 = 52. Predtým 52 : 2 = 26 a ešte skôr 26 : 2 = 13. Tu narážame na problém. Číslo 13 sa už nedá deliť číslom 2. To znamená, že v tento deň sme ráno museli pridať 1 alebo 3 žubrienky. Ak by sme pridali 3, pred ich pridaním by sme mali v jazierku 10 žubrienok, no neostali by nám žiadne žubrienky, z ktorých by sme tých 10 dostali. Takže sme tam mohli ráno pridať len jednu žubrienku a večer po množení ich tam bolo 12. Predchádzajúci deň ich tam teda bolo 6 a predtým 3. Opäť máme nepárny počet žubrienok. Ostali nám už len dve. Po rozmnožení sme tam jednu museli predať a teda sme ich tam mali dve. Tie vznikli tak, že sa rozmnožila jedna žubrienka, ktorú sme nasadili na začiatku. Poďme si to opäť pozrieť tak, ako sa to dialo v čase:
Prvý deň dáme ráno do jazierka 1 žubrienku, na obed sa rozmnoží na 2. Ďalší deň ráno pridáme ďalšiu žubrienku. Máme 3, ktoré sa rozmnožia na 6 a týchto 6 na 12. Opäť pridáme jednu žubrienku – už poslednú. V jazierku je teraz 13 žubrienok, ktoré sa rozmnožia na 26, potom 52 a nakoniec na 104 žubrienok. Pridávanie žubrienok sme robili vždy vtedy, keď sme museli a teda to rýchlejšie nejde a podarilo sa nám to za 6 dní.
Teraz zopakujeme tento postup na tretie jazierko, ktoré ma kapacitu 144 žubrienok. Poďme deliť:
144 : 2 = 72 -> 72 : 2 = 36 -> 36 : 2 = 18 -> 18 : 2 = 9. Tu sme ráno museli pridať žubrienku, čiže predtým ich tam bolo 8. Predchádzajúci deň boli 4 a predtým 2. Tieto 2 žubrienky ešte máme, takže už nemusíme deliť ďalej, len ich nasadíme do jazierka. Zvládli sme to za 6 dní. Opäť kontrola množenia:
Nasadíme 2 žubrienky: 2 -> 4 -> 8. Pridáme poslednú žubrienku -> 9 -> 18 -> 36 -> 72 -> 144. Opäť sme žubrienky pridávali, keď sme museli a teda máme najrýchlejší spôsob.
Všetky jazierka sa nám teda podarí zaplniť do šiestich dní (prvé za 5 dní a zvyšné dve za 6).

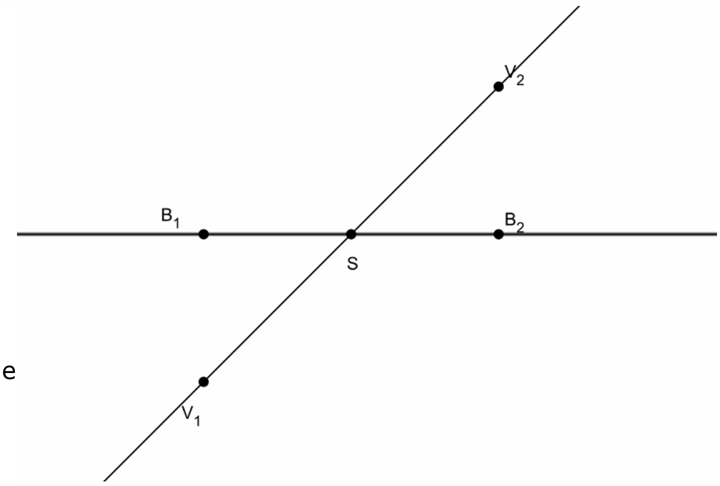
Príklad č. 2 (opravovala Betka Bohiníková)

Ako prvé si musíme uvedomiť, že začiatočných rozložení brány, studne a veže je viacero. Ak by sme ich všetky vykreslili mali by sme dve možnosti, buď vyrobiť postup pre každú jednu alebo si všimnúť nejakú spoločnú vlastnosť týchto rozložení. Keďže celkovo je tých rozložení 24 radšej sa posnažíme nájsť tú vlastnosť.
Všetky rozloženia sa dajú rozdeliť do dvoch skupín. Tie čo majú vežu a bránu na jednej strane alebo tie, čo ich majú na rôznych stranách (pozri obrázok). Všetky ostatné rozpoloženia sú už iba otočením alebo preklopením cez stredovú os.





Teraz nám stačí vyrobiť len dva postupy, a pokryjeme všetky rozloženia. Oveľa lepšie by však bolo nájsť jeden postup pre všetky. Tak to skúsime. Môžeme pri tom používať iba lano (ktoré nám slúži ako kružidlo) a laserový značkovač (ten má funkciu rovného pravítka). Nech už sú B a V kdekoľvek, môžeme si predĺžiť priamky BS a VS. Do kružidla si naberieme vzdialenosť BS a nanesiem ju na priamku BS. Priesečník bude nová brána. Rovnako nájdeme aj novú vežu. Naberiem do kružidla veľkosť VS a nanesieme ju na priamku VS. V tomto momente máme dve veže a dve brány, pričom sú na protiľahlých stranách. Dostali sme sa do situácie ako na obrázku vpravo. Obrázok môže byť prípadne nejako otočený alebo preklopený, čo nám však vôbec nevadí. Teraz si spravíme priamky cez B_1V_1 a B_2V_2 , do kružidla naberieme vzdialenosť B_1V_1 a nanesieme ju na obe priamky, na tú stranu kde ešte nie je vrchol. Dostávame zvyšné dve veže. Pospájame veže, ktoré ešte nie sú spojené, tak aby nám vznikol štvorec. Zostávajú už len dve brány, a tie získame, ak nanesieme vzdialenosť brána veža z jednej z veží na stene na ktorej nám brána chýba.

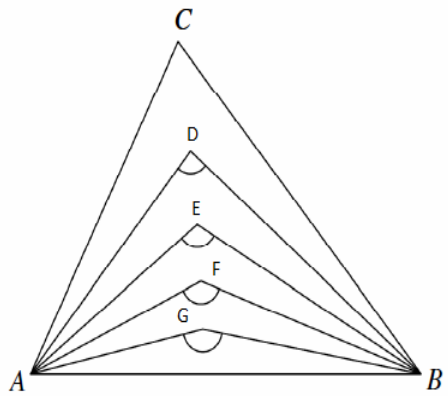


A celá základňa je hotová. Samozrejme sa dali nájsť aj iné postupy, ale toto bol asi jeden z najkratších.

Príklad č. 3 (opravoval Mojo Majdiš)

Najskôr sa pozrime na počet cifier problémových dátumov. Ak je dátum dvojciferný, tak prvá cifra patrí dňu a druhá mesiacu. Čiže dvojciferné dátumy nám nerobia problém. Ak je dátum štvorciferný, tak prvé dve cifry označujú deň a posledné dve označujú mesiac. Takže problém nám budú robiť iba trojciferné dátumy. Aby však boli problémové, tak sa musia dať pochopiť dvoma spôsobmi: 1. prvá cifra patrí dňu a druhá s treťou mesiacu, 2. prvé dve cifry patria dňu a posledná cifra mesiacu.
Z prvého pochopenia vidíme, že druhá s treťou cifrou musia tvoriť niektoré dvojčíslie z 10,11 alebo 12. Z druhého pochopenia vidíme, že prvá cifra môže byť len 1, 2 alebo 3 (pretože ani jeden mesiac nemá 32 alebo viac dní). Zároveň vidíme, že posledná cifra nemôže byť 0, pretože nultý mesiac v kalendári nenájdeme. Vypíšme si všetky trojčísla, ktoré nám môžu vzniknúť kombináciou prvého a druhého pochopenia. Sú to 111, 112, 211, 212, 311, 312. Pohľadom do kalendára (alebo zalovením v pamäti) zistíme, že prvých päť vypísaných čísel je skutočne problémových, no číslo 312 problémové nie je, pretože mesiac február má len 28 dní (takže nám nemôže vzniknúť dátum 31.2.).
Čiže problémových čísel je 5 a problémové dátumy sú 11.1., 21.1., 31.1, 11.2., 21.2., 1.11., 2.11., 3.11., 1.12., 2.12.. Keďže problémových dátumov je 10 a každému dátumu prislúcha jeden list denníka, tak vypadnutých listov, ktoré nevieme zaradiť, je 10.

Príklad č. 4 (opravovala Janka Fraasová)



Aby sme sa spolu vedeli rozprávať, označíme si body, ktoré vznikajú z pomocných čiar, písmenami D, E, F, G ako na obrázku. Ďalej si označíme uhol $\sphericalangle CAB$ písmenom α a uhol $\sphericalangle CBA$ písmenom β. Počas celého riešenia budeme mať na pamäti, že súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180°. Keďže dopredu nevieme, koľko má úloha riešení, urobíme jej kompletný rozbor – neskončíme pri prvom úspešnom výsledku.

Ak by bol pravý, čiže 90° uhol pri vchole D, teda $\sphericalangle ADB$, potom by bol súčet uhlov DAB a DBA 90°. Keďže tieto uhly predstavujú každý $\frac{4}{5}$ uhlov α a β, vieme zistiť aj súčet ich veľkostí: $\frac{4}{5}(\alpha+\beta)=90°$ a teda $\alpha+\beta=112{,}5°$, čiže náš hladný uhol $\sphericalangle ACB$ je 67,5°.

Ak by bol pravý uhol pri vchole E, teda $\sphericalangle AEB$, potom by bol súčet uhlov EAB a EBA 90°. Keďže tieto uhly predstavujú každý $\frac{3}{5}$ uhlov α a β, potom $\frac{3}{5}(\alpha+\beta)=90°$ a teda $\alpha+\beta=150°$ a náš hladný uhol $\sphericalangle ACB$ má 30°.

Ak by bol pravý uhol $\sphericalangle AFB$, potom by bol súčet uhlov FAB a FBA 90°. Keďže tieto uhly predstavujú každý $\frac{2}{5}$ uhlov α a β, potom $\frac{2}{5}(\alpha+\beta)=90°$ a teda $\alpha+\beta=225°$. Toto však nemohlo nastať, lebo súčet všetkých uhlov v trojuholníku ABC je 180°, teda menej ako 225°.
Ak by bol pravý uhol $\sphericalangle AGB$, potom by bol súčet uhlov GAB a GBA 90°. Keďže tieto uhly predstavujú každý $\frac{1}{5}$ uhlov α a β, potom $\frac{1}{5}(\alpha+\beta)=90°$ a teda $\alpha+\beta=450°$. Toto sa však tiež nemohlo stať.

Čiže veľkosť uhla pri vrchole C mohla byť 67,5° alebo 30°.

Čiže veľkosť uhla pri vrchole C mohla byť 67,5° alebo 30°.

Výsledky ankety o úlohách 1. série:

Úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	6	4	7	2
najmenej sa páčila	3	3	2	9
najťažšia bola	4	2	0	13
najľahšia bola	4	6	9	0