JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

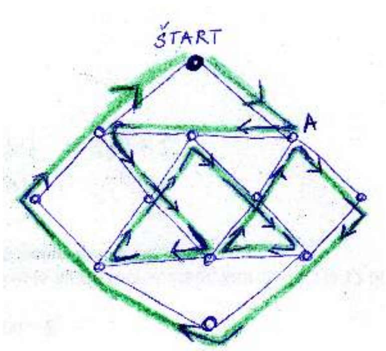
SEZAM, školský rok 2012/13, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
do rúk sa k vám práve dostali zadania tretej a zároveň poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Zvieratká, ktoré si už užívajú slnečné dni, sa potešili všetkým vaším riešeniam. Zároveň na vás čaká posledná sada úloh, s ktorými potrebujú pomôcť. Okrem toho môžete využiť príležitosť vylepšiť si svoje umiestnenie vo finálnom poradí. Dobrá tretia séria Vás môže vyniesť veľmi vysoko. Úspešní riešitelia sa môžu tešiť na **letný tábor**, ktorý **sa bude konať v dňoch 9. až 18. augusta pri Trenčanskom Jastrabí**. Pozvánky (definitívne alebo náhradnícke) pošleme všetkým, ktorí sa do súťaže zapojili aspoň v dvoch sériách.
Pred tým než sa pustíte do riešenia úloh, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, určite vám to pomôže.
Aj v poslednom kole Vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie a nezabúdali na spiatočnú obálku. Značne nám to pomôže pri organizácii.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na vynovenej stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Baška Marečáková*)

Našou úlohou je prejsť po každom záhone v záhradke raz. Inak povedané, máme nakresliť záhony v záhradke jedným ťahom. Môžeme to skúsiť tak, že začneme pri vrchnom kolíku a vyberieme si jednu z ciest, ktorou pôjdeme. Všimnime si, že na konci sa druhou cestou vrátime. Na prvom kolíku zabočíme dovnútra útvaru a prejdeme vnútro. Potom dokončíme obvod a vrátime sa do začiatočného bodu. Táto cesta je zaznačená na obrázku vpravo. Tým sme úlohu vyriešili.

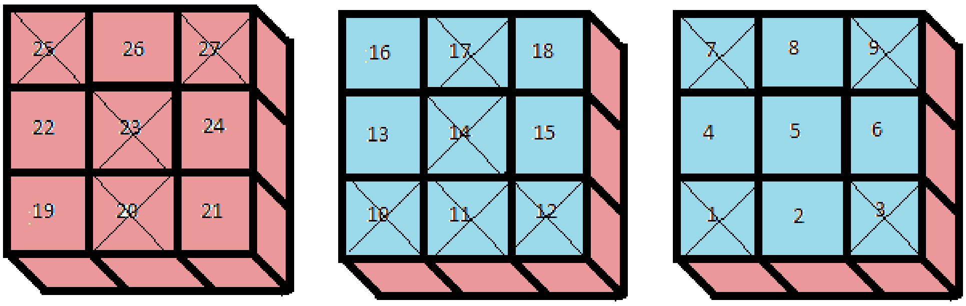


Uvedomme si, že tento nákres nám vytvára viac možných riešení. Ak by sme napríklad začali od kolíku označeného A a ideme presne po smere šípok, tak tiež nakreslíme celý obrázok. Podobne môžeme začať aj pri hociktorom inom kolíku a ísť po smere šípok. Takto sme našli teda dokonca až dvanásť možných ciest. Úlohu zo zadania, nájsť nejakú cestu, sme už splnili, no zaujímavá (a aj ťažká) otázka na zamyslenie je, koľko je všetkých možných ciest ako prejsť záhon.

***Príklad č. 2** (opravovali Sisa Nepšinská a Adam Kňaze)*

Najprv chceme zistiť, koľkými spôsobmi vieme nastrieľať piatimi drozdami 9 bodov. Ak sme aspoň raz trafili najväčšiu hodnotu (5), tak nám zostáva trafiť štyrmi drozdami 4 body. Keďže každý drozd musí trafiť aspoň jeden bod, tak môžeme 9 bodov dosiahnuť už len jediným spôsobom a to tak, že všetci zvyšný trafia 1 bod. Dostávame prvú možnosť (5,1,1,1,1). Dve päťky nemôžeme trafiť, lebo spolu dávajú súčet 10 a to je viac ako 9.
Ak najväčšia trafená hodnota bude 3, zostáva nám trafiť 6 bodov štyrmi drozdami. Ak ako druhú hodnotu trafíme znova trojku, ostanú nám 3 body a 3 drozdy. Ďalšie riešenie je teda (3,3,1,1,1). Tri trojky trafiť nemôžeme, lebo by sme využili len 3 drozdy a už mali súčet 9. Ak ako druhé číslo trafíme dvojku, máme zatiaľ 3 + 2 = 5 bodov. Ostanú nám 3 drozdy a 4 body, ktoré nimi môžeme trafiť. To sa dá len jedným spôsobom a to 2 + 1 + 1. Tretia možnosť je teda (3,2,2,1,1). Tým sme rozobrali možnosti, kde drozdy okrem trojky trafili buď trojku, alebo dvojku. No ak by zvyšné štyri trafené hodnoty boli iba jedna, tak dokopy dostaneme iba 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7, a to je primálo.
Poslednú možnosť dostaneme, ak bude najväčšia zasiahnutá hodnota 2. Ostanú nám 4 drozdy a 7 bodov, čo dosiahneme len kombináciou 2+2+2+1, teda zásah terča bude (2,2,2,2,1).
Všetky možnosti sú teda 4 – (5,1,1,1,1), (3,3,1,1,1), (3,2,2,1,1) a (2,2,2,2,1).
Pri súčte 11 budeme postupovať rovnako- vyberieme najväčšiu hodnotu (5), zistíme najviac koľko krát ho mohli drozdy trafiť – to mnohým z vás v riešeniach chýbalo – a vypíšeme všetky možnosti preň. Potom vezmeme druhé najväčšie číslo a postup zopakujeme. ***Vyjde nám týchto 5 možností: (5,3,1,1,1), (5,2,2,1,1), (3,3,3,1,1), (3,3,2,2,1) a (3,2,2,2,2).***
V druhej časti úlohy musíme zistiť, ktoré 4 čísla treba napísať na terč, aby sme piatimi drozdami dosiahli čo najväčší počet rôznych zásahov dávajúci 12 bodov. Hodnotu väčšiu ako 8 nemôžeme použiť, lebo by nám ostali 4 drozdy a menej ako 4 body, no všetky drozdy musia trafiť terč. Číslo 12 môžeme zapísať ako súčet piatich čísel týmito 13-imi spôsobmi: (8,1,1,1,1), (7,2,1,1,1), (6,3,1,1,1), (6,2,2,1,1), (5,4,1,1,1), (5,3,2,1,1), (5,2,2,2,1), (4,4,2,1,1), (4,3,3,1,1), (4,3,2,2,1), (4,2,2,2,2), (3,3,3,2,1) a (3,3,2,2,2). Prišli sme na ne rovnakým spôsobom ako v prvej časti. Vidíme, že z čísel 1,2,3 a 4 môžeme vyskladať posledných 6 možností. Z nich sa číslo 4 nachádza v štyroch, 3 v štyroch, 2 v piatich a 1 v štyroch možnostiach. Keby sme teda ktorékoľvek číslo vymenili za väčšie, stratili by sme aspoň 4 možnosti (tie, v ktorých sa vymenené číslo nachádza) a získali najviac 3 možnosti (pri výmene za číslo 5). ***Teda najviac možností - šesť - dostaneme, ak na terč namaľujeme čísla 1,2,3 a 4.*** V tejto časti úlohy veľa z vás prišlo na správne omaľovanie terča, no mali ste problém vysvetliť, prečo je to to najlepšie omaľovanie.

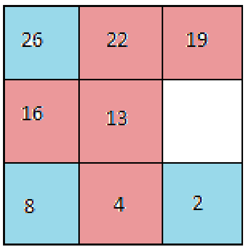
Príklad č. 3 *(opravovali Ika Hucíková a Samo Tomašec)*
Chceme vidieť nakreslené pohľady kocky zdola, zhora, sprava, zľava, spredu a zozadu. Najprv si pozrieme, ako vyzerala kocka po tom, ako veveričky zobrali jednotlivé kocky. Pekne to vidno, keď si nakreslíme kocku po poschodiach. Krížikom sú označené odobraté kocky.



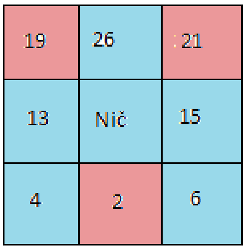
Teraz už len stačí nakresliť pohľady z jednotlivých strán a nepomýliť sa na farbe a na číslach, ktoré vidno. Tiež si treba dávať pozor na to, že ktoré číslo je kde v akom pohľade. Napríklad v pohľade spredu vieme, že kocka 9 je vpravo. Ale keď sa pozrieme zozadu, tak ju je vidno vľavo. Teda keby sme si vymenili kocky 9,7 a aj kocky s číslom 16, 18 a 25, 27; tak by sme mali vymenený 1. a 3. stĺpec . To by ale nebolo to isté, už by sme nemali pohľad zozadu, ani keby sme sa to snažili otočiť. Tam, kde je bielo je diera cez celú kocku.

Teda pohľady budú vyzerať takto:

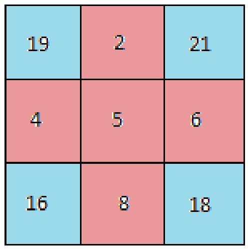
Zľava



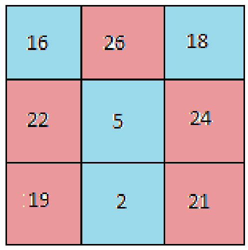
Spredu



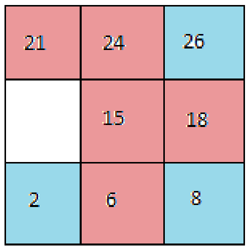
Zdola



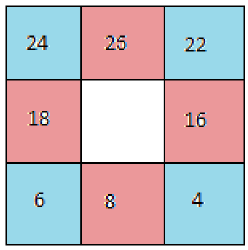
Zhora



Sprava

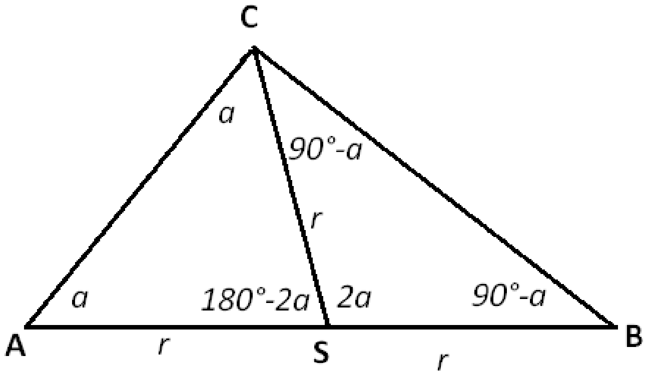


Zozadu



Príklad č. 4 *(opravoval Maťo Bachratý)*
Prvá vec, ktorú ste si skoro všetci všimli je taká, že prvá líška, ktorú som stretol, musela klamať. Prečo je to tak? Nuž na otázku, či klame v nedeľu, odpovedala „Áno," no pritom obe líšky v nedeľu hovoria pravdu. Takže prvá líška určite klamala. Vďaka tomu môžeme povedať, že určite nie je nedeľa, vtedy by som určite nestretol klamúcu líšku.
Navyše hociktorý deň okrem nedele vždy jedna líška klame a druhá hovorí pravdu. A tak bez ohľadu na to, ktorú líšku som stretol ako prvú, mi tá druhá určite odpovedala pravdivo. Keďže pravdivá otázka na odpoveď, či klameš v nedeľu, je pre obe líšky „nie," tak mi druhá líška určite odpovedala „Nie."
Teraz si už ľahko uvedomíme, že okrem nedele sa táto príhoda mohla odohrať hocikedy. Ak by bol pondelok, utorok alebo streda, tak by som ako prvú stretol Elišku (lebo v tieto dni klame ona) a ako druhú Maryšku. No a ak by bol štvrtok, piatok alebo sobota, tak by som ako prvú stretol Maryšku a ako druhú Elišku.
Druhá líška mi odpovedala „Nie." Určite nebola nedeľa. Okrem toho mohol byť hociktorý iný deň. V pondelok, utorok alebo stredu, by som líšky stretol v poradí Eliška, Maryška, v dni štvrtok, piatok alebo sobota, by som ich stretol v opačnom poradí.

Príklad č. 5 *(opravoval Feri Dráček)*
Jedno z možných riešení je napríklad takéto:
Máme trojuholník ABC. Vieme, že lASl = lSCl = lSBl (na obrázku označené ako *r*). Potom trojuholník ASC je rovnoramenný so základňou AC. Označme si teda veľkosť rovnakých uhlov ACS a CAS ako a. Uhol ASC má potom veľkosť 180°-$2a$. Uhol BSC je potom rovný $2a$, lebo s uhlom ASC tvorí priamy uhol. Keďže zo zadania vieme, že aj trojuholník CSB je rovnoramenný so základňou CB, tak uhly SCB, SBC sú rovnako veľké. Ich veľkosť je $\frac{180-2a}{2} = 90-a$.



Uhly v trojuholníku ABC majú teda veľkosti:
CAB = a, ABC = $90-a$, ACB = $(90-a)+a = 90°$.
Uhol ACB teda má vždy veľkosť 90^0 .
Veľkosti uhlov CAB a ABC nevieme určiť, ale musia spĺňať podmienky CAB = a a ABC = $90-a$. Za a môžem dosadiť ľubovoľné hodnoty väčšie ako nula a menšie ako 90°.
Jednoznačne teda viem určiť iba jeden uhol, a to uhol ACB, ktorý má vždy veľkosť 90°.

Príklad č. 6 *(opravoval Mojo Majdiš)*
Označme si cifry hľadaných čísel ak A, B, C a D. Číslo zapísané ako AB si potom môžeme napísať ako 10xA+B, to je jeho skutočná veľkosť. Tak isto číslo BA má veľkosť 10xB+A, číslo zapísané CD je 10xC+D a číslo DC je 10xD+C. Potom rovnicu zapísanú ciframi ako ABxCD=BAxDC môžeme prepísať na rovnicu
(10xA+B)x(10xC+D)=(10xB+A)x(10xD+C).
Pozrime sa na ľavú stranu rovnice a roznásobme ju: (10xA+B)x(10xC+D) =100xAxC+10xAxD+10xBxC+BxD.
Takisto pravá strana sa dá roznásobiť: (10xB+A)x(10xD+C) =100xBxD+10xBxC+10xAxD+AxC. A teda dostávame rovnosť
100xAxC+*10xAxD+10xBxC*+BxD= 100xBxD+*10xBxC+10xAxD*+AxC.
Od oboch strán odpočítame výrazy 10xAxD a 10xBxC a dostaneme 100xAxC+BxD=100xBxD+AxC, čo upravíme na tvar 99xAxC=99xBxD. Obe strany vydelíme číslom 99 a dostávame AxC=BxD.
Teraz nám stačí nájsť všetky štvorice spĺňajúce poslednú rovnosť.
Skúšaním možností môžeme nájsť všetky:
1x4=2x2, 1x6=2x3, 1x8=2x4, 1x9=3x3, 2x2=1x4, 2x3=1x6, 2x4=1x8, 2x6=3x4, 2x8=4x4, 2x9=6x3, 3x2=6x1 3x3=1x9, 3x8=4x6, 4x1=2x2,4x2=8x1 4x3=2x6, 4x4=2x8, 4x6=3x8, 4x9=6x6, 6x1=2x3, 6x2=3x4, 6x3=2x9, 6x4=3x8, 6x6=4x9, 8x1=2x4, 8x2=4x4, 8x3=4x6, 9x1=3x3, 9x2=3x6, 9x4=6x6.
Z toho postupne dostávame všetky vyhovujúce dvojice čísel: 12 a 42 (12x42=21x24), 12 a 63, 12 a 84, 13 a 62, 13 a 93, 14 a 82, 23 a 64, 24 a 63, 24 a 84, 26 a 93, 34 a 86, 36 a 84, 46 a 96. (Dvojice sme usporiadali a vypísali tak, aby prvé číslo bolo čo najmenšie.)