SEZAM, školský rok 2012/13, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou končí aj celá letná časť SEZAMu. Zvieratká vám všetkým ďakujú za celoročnú pomoc pri riešení ich problémov a prajú pekné a pohodové leto. Tých najšikovnejších z vás navyše čaká letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 9. až 18. augusta pri Trenčanskom Jastrabí. Pred tým, než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov a pekné leto želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovali Miro Psota a Ivka Hrivová)

V dvoch krabičkách našiel Riško 35 cukríkov, ktoré rozdelil medzi svojich siedmych bratov, každému po päť (5 • 7 = 35) a ešte niekoľko lentiliek, ktoré už medzi bratov rozdeliť nemohol, čiže 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6 lentiliek (keby našiel viac lentiliek, napríklad 10, tak každému bratovi dá ešte jednu lentilku a ostanú mu iba 3). Veľa z vás zistilo, že počet lentiliek v týchto dvoch krabičkách musí byť párny (v každej krabičke je rovnako veľa lentiliek a krabičky sú dve). V dvoch krabičkách bolo spolu 35 lentiliek, ktoré Riško rozdelil + niekoľko lentiliek, čo ostalo nazvyš. Keby ostalo nazvyš 2, 4 alebo 6 lentiliek, tak by bolo v oboch krabičkách spolu 37, 39 alebo 41 lentiliek, no to nie je párne číslo. Mohlo tam byť navyše 1, 3 alebo 5 lentiliek.

Zistili sme, že v dvoch krabičkách môže byť dokopy 36,38, alebo 40 lentiliek. Tým pádom v jednej krabičke môže byť 18, 19 alebo 20 lentiliek. Navyše vieme, že Riškovi pri rozdeľovaní cukríkov z troch krabičiek ostal tiež niekoľko lentiliek navyše, a bolo to menej ako pri dvoch krabičkách.

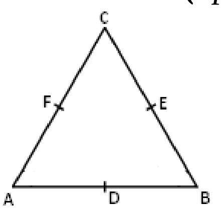
Ak by bolo v jednej krabičke 18 cukríkov, tak v dvoch krabičkách bude 36 lentiliek a po rozdelení mu ostane 1 lentilka. V troch krabičkách bude 54 lentiliek a ostane mu 5 lentiliek. To nevyhovuje, lebo pri rozdeľovaní z troch krabičiek mu malo ostať menej lentiliek ako pri rozdeľovaní z dvoch, no 5 nie je menej než 1.

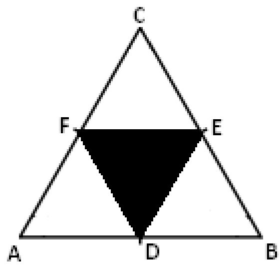
Ak by bolo v jednej krabičke 19 lentiliek, tak v dvoch bude 38 (ostanú mu 3 lentilky) a v troch bude 57 lentiliek (ostane mu 1 lentilka). Táto možnosť vyhovuje zadaniu.

Ak by bolo v jednej krabičke 20 lentiliek, tak v dvoch bude 40 (ostane mu 5 lentiliek) a v troch bude 60 lentiliek (ostanú mu 4 lentilky). Táto možnosť tiež vyhovuje zadaniu.

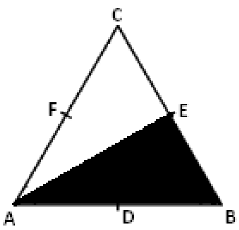
V jednej krabičke môže byť 19 alebo 20 lentiliek.

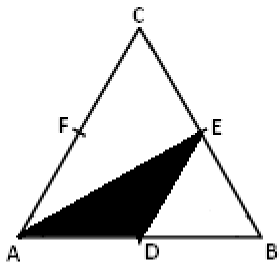
Príklad č. 2 (opravoval Miro Hudec)



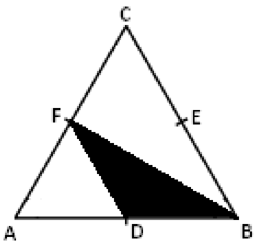


Nakreslím si včelíny a označím si ich písmenkami (obrázok vľavo). Zároveň je dobré si uvedomiť, že ku každej trojici včelínov, ktorá neleží na jednej priamke vieme nakresliť práve jednu kružnicu, ktorá ponad ne prechádza. Takže porátajme tieto trojice (každá trojica bodov neležiacich na jednej priamke tvorí trojuholník, takže budeme rátať trojuholníky). Budú to 3 biele malé Δ, jeden čierny a potom jeden veľký ΔABC (spolu 5 na obrázku vpravo).





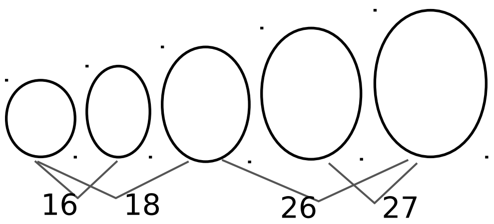
Na druhom obrázku vľavo vidíme 2 Δ ale zarátame 6. To preto, lebo tvarom rovnaké trojuholníky, líšiace sa len polohou by sme dostali, keby sme ΔABC rozdelili spojnicou CD alebo BF (miesto AE tak ako je na obrázku). Na druhom obrázku vpravo vidíme jeden čierny Δ, ale ten zarátame 3 krát. To preto, lebo tvarom rovnaké len polohou (vrcholmi) sa líšiace trojuholníky by sme dostali, keby sme miesto strany AD použili BE a CF (boli by to teda Δ BEF a CFD). No a z rovnakého dôvodu zarátame aj posledný typ Δ (tretí obrázok vľavo) 3 krát.



Spolu máme sedemnásť trojuholníkov. Teraz ale musíme ešte zistiť, či je všetkých 17 kružníc rôznych. Body A, B, E a F sú rovnako vzdialené od bodu D – to vyplýva z toho, že ΔABC je rovnostranný. To znamená, že budú ležať na spoločnej kružnici. Spomenuté body tvoria 4 jedinečné Δ: ABE, ABF, AEF a BEF. To znamená, že v tých 17-tich kružniciach máme túto konkrétnu kružnicu zarátanú 4 miesto jedného razu. Treba si ale uvedomiť, že toto isté platí aj o kružnici so stredom v E (prechádzajúcej bodmi B, C, D a F) a kružnici so stredom F (prechádzajúcej bodmi A, C, D a E). Takže keď to zohľadníme (to, že tieto kružnice započítame len raz), dostaneme 17 – 3 – 3 – 3 = 8 rôznych kružníc.

Kružníc prechádzajúcich ponad aspoň tri rôzne včelíny je osem.

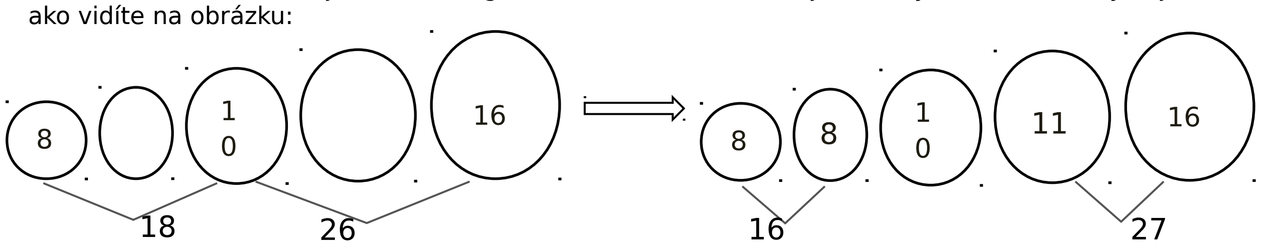
Príklad č. 3 (opravovala Erika Novotná)



Sestrička vážila päť vajíčok, z ktorých každé bolo inak veľké a inak ťažké – najmenšie, malé, stredné, veľké a najväčšie, zoradené tak, ako vidíte na obrázku. Pri prvom vážení musela vážiť **najmenšie** a **malé**, pri druhom **najmenšie** a **stredné** (nemohla vážiť malé a stredné, lebo tie by vážili viac ako táto dvojica – nebola by to druhá najľahšia dvojica vajíčok), pri treťom vážení **najväčšie** a **veľké**, pri štvrtom **najväčšie** a **stredné** (stredné a veľké nie je druhá najťažšia dvojica, ale až tretia najťažšia dvojica). Keď zakreslíme uvedené váženia aj s hmotnosťami, dostaneme obrázok, ktorý vidíte naľavo.

Na základe tohto obrázku vidíme, že ak si váhu stredného vajíčka nejako tipneme, ostatné hmotnosti už vieme dopočítať. Musíme ale pritom dať pozor na to, že dopočítané hmotnosti sú pekne zoradené. Pre váhu **stredného** vajíčka nemusíme skúšať všetky možnosti – keďže s najmenším vajíčkom dáva dokopy 18 gramov, **musí vážiť viac ako 9 gramov** (inak by nebolo ťažšie ako najmenšie vajíčko). Takisto, keď si všimneme stredné vajíčko dokopy z najväčším, zistíme, že **stredné musí vážiť menej ako 13 gramov** (inak by bolo nebolo ľahšie ako najväčšie vajíčko). Teda pre váhu stredného vajíčka nám zostávajú tri možnosti: 10, 11, 12.

1. možnosť: Stredné vajíčko váži 10 gramov. Potom na základe jednotlivých hmotností by vajíčka museli vážiť tak, ako vidíte na obrázku:



Pri tejto možnosti však najmenšie a malé vajíčko vážia rovnako veľa, čo nemôže podľa zadania nastať.

2. **možnosť:** Stredné vajíčko váži 11 gramov. Potom ostatné vajíčka musia vážiť postupne 7, 9, 12 a 15 gramov.
3. **možnosť:** Stredné vajíčko váži 12 gramov. Potom ostatné vajíčka musia vážiť potupne 6, 10, 13 a 14 gramov.

Skúškou správnosti zistíme, že druhá a tretia možnosť ako jediné vyhovujú – teda úloha má dve riešenia. ***Vajíčka mohli vážiť buď 7, 9, 11, 12, 15 gramov alebo 6, 10, 12, 13, 14 gramov.***

Príklad č. 4 (**opravovala Ajka Bachratá**)

Najskôr si napíšeme ktoré líšky v ktoré dni klamú a v ktoré dni hovoria pravdu.

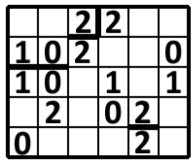
	Pondelok	Utorok	Sterda	Štvrtok	Piatok	Sobota	Nedeľa
Eliška	klame	klame	klame	Pravda	pravda	pravda	pravda
Maryška	pravda	pravda	Pravda	Klame	klame	Klame	pravda
Ryška	klame	klame	Klame	Klame	klame	klame	Klame

Začnime prvou líškou, ktorá povedala „Ja som Ryška“ . Takúto vetu by Ryška nikdy nemohla povedať, pretože musí vždy klamať. Takže prvá líška mohla byť buď Eliška, alebo Maryška a musela by klamať. V pondelok, utorok alebo stredu túto vetu povie Eliška, lebo vtedy klame (Maryška by musela povedať pravdu). Vo štvrtok, piatok alebo sobotu túto vetu povie Maryška, lebo vtedy klame (Eliška by musela povedať pravdu, že je Eliška).
Druhá líška súhlasila s prvou „Áno, to je ona (Ryška)!“. Keďže už vieme, že prvá líška nebola Ryška, tak vieme, že aj druhá líška klamala. Keď sa pozrieme do tabuľky zistíme, že Eliška a Maryška neklamú nikdy v rovnaký deň, takže nám ostáva na toto druhé klamanie jedine Ryška. Ešte musíme skontrolovať, či sú naozaj dni keď klame Eliška aj Ryška, alebo Maryška aj Ryška. No a podľa tabuľky takéto dni sú.
Ak bol pondelok, utorok alebo streda tak prvá líška bola Eliška a druhá líška bola Ryška. Ak bol štvrtok, piatok alebo sobota, tak prvá líška bola Maryška a druhá Ryška. V oboch prípadoch musí byť druhá líška Ryška a iná možnosť už nie je, lebo Eliška a Maryška neklamú obe v rovnaký deň.
Takže Ryška existuje a videl ju človek, ktorý stretol líšky na lúke.

Príklad č. 5 (**opravoval Jurko Solcani**)

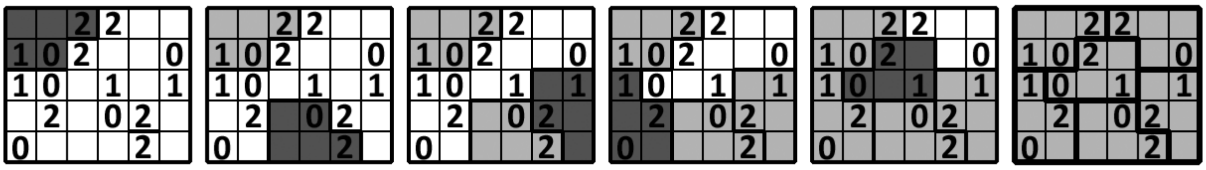
	1	2	3	4	5	6
A			2	2		
B	1	0	2			0
C	1	0		1		1
D		2		0	2	
E	0				2	

Máme sklad s 30 komôrkami (5x6), v ktorých sú uskladnené zrnká maku, pričom niektoré sú prázdne. Pre našu úlohu však nie sú dôležité počty zrniek, ale ich zvyšky po delení tromi. Nakreslíme si preto sklad s komôrkami, kde namiesto počtu zrniek bude zvyšok po delení tromi.
Za úlohu máme rozdeliť sklad na usporiadaním aj počtom komôrok rovnaké časti tak, aby bol v tej istej časti každý zvyšok maximálne 1-krát, prípadne nebol vôbec. Všimnime si, že máme v sklade 6-krát zvyšok 2. To znamená, že aj počet častí musí byť aspoň 6 (každá dvojka musí byť v inej časti). Potom veľkosť jednej časti bude najviac 5 komôrok (30 : 6 = 5).



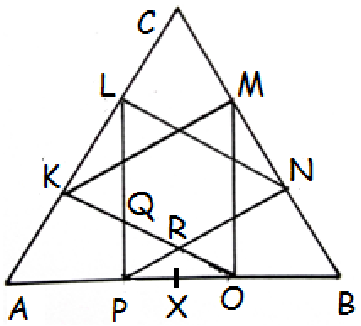
Zvýraznime si v obrázku hranice medzi rovnakými zvyškami, ktoré sú vedľa seba. Tieto hranice sú aj hranicami vo výslednom rozdelení a navyše nám ukazujú, že ak existuje rozdelenie skladu na časti veľké 5 komôrok, musia mať tvar . Skúsme teda nájsť rozdelenie skladu na časti takéhoto tvaru.

Prvá časť je jasná, lebo ju jednoznačne určujú hranice v ľavom hornom rohu skladu (obrázok *a*). Pozrime sa na komôrku E5, ktorá je hranicou oddelená od komôrky D5. Tvarom, ktorý uvažujeme, ju môžeme pokryť iba tak, ako zobrazuje obrázok *b*. Ďalej komôrka E6 musí byť vyplnená tak, ako je na obrázku *c*. Poďme teraz začleniť zvyšok 0 v E1. Keďže zvyšok 0 v C2 musí patriť do inej časti, opäť máme iba jedinú možnosť (obrázok *d*). Takisto máme iba jednu možnosť na pokrytie zvyšku 0 v C2 (obrázok *e*). Tým sme určili aj poslednú časť, ktorá má dokonca aj požadovaný tvar. Môžeme skontrolovať, že žiadna časť neobsahuje dva rovnaké zvyšky (obrázok *f*).
Existujú aj rozdelenia pre časti veľkosti 3, 2 a 1, tie by ale mali 10, 15 a 30 častí a my sme hľadali rozdelenie skladu s čo najmenším počtom. ***Výsledné rozdelenie je na obrázku f.***



a) **b)** **c)** **d)** **e)** **f)**

Príklad č. 6 (*opravovala Kaťa Jasenčáková*)



Prišlo veľa rôznych riešení, my si ukážeme jedno z tých, kde sa dá vyhnúť počítaniu s odmocninami, lebo sa s nimi ťažko počíta a priebežne ich vyčísľovať nemôžeme. To by sme počítali so zaokrúhlenými hodnotami a mohli by sme dostať dosť nepresný výsledok.
Ak od jazera (trojuholník ABC) odpočítame trikrát obsah trojuholníka APL (lebo obsahy trojuholníkov APL, CLN , BNP sú rovnaké) a obsah zvyšných troch trojuholníkov, jeden z nich označme PQR, ostane nám obsah pódia.
Trojuholníky ABC a AOL sú podobné (majú zhodný uhol pri vrchole A,

$|AO| = \frac{2}{3}|AB|$ a $|AL| = \frac{2}{3}|AC|$). Preto výška trojuholníka ABC má $2/3$ z výšky trojuholníka ABC (v_a). Obsah trojuholníka ABC je $\frac{a.v_a}{2} = 81\ m^2.$ Obsah trojuholníka AOL je $S_{\Delta AOL} = \frac{\frac{2}{3}a.\frac{2}{3}v_a}{2} = \frac{4}{9}\frac{a.v_a}{2} = \frac{4}{9}.81 = 36\ m^2.$ Bod P je v polovici strany AO, lebo body P a O rozdeľujú stranu AB na tretiny. Preto je obsah trojuholníka APL polovica z obsahu trojuholníka AOL, teda $S_{APL} = 18\ m^2$.

Ostáva vypočítať obsah rovnostranného trojuholníka PQR. $|PQ| = \frac{1}{3}|PL| = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}v_a = \frac{2}{9}v_a$ a výška na stranu PQ je $v_p = \frac{1}{3}|AX| = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{6}|AB|.$ Obsah trojuholníka PQR je $S_{PQR} = \frac{\frac{1}{6}a.\frac{2}{9}v_a}{2} = \frac{1}{27}\frac{a.v_a}{2} = \frac{81}{27} = 3\ m^2.$

Teda veľkosť pódia je $S_{ABC} - 3.S_{APL} - 3.S_{PQR} = 81 - 3.18 - 3.3 = 18\ m^2.$