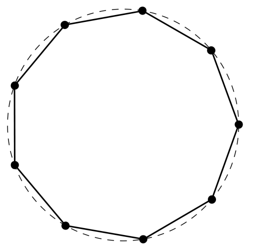
# SEZAM, školský rok 2012/13, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
práve vám prišli došli zadania poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Príbehy zvieratok sa pomaly blížia ku koncu. Vám sa naskytá posledná šanca ešte zabojovať o dáke tie bodíky a dobré umiestnenie v záverečnom poradí. Predtým než sa pustíte do riešenia si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, dozviete sa kde ste spravili prípadné chyby, a možno sa dozviete aj iné spôsoby ako sa dali úlohy vyriešiť.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

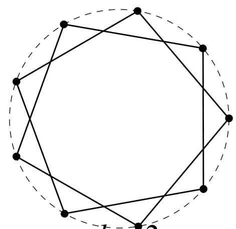
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

## *Príklad č. 1 (opravovala Soňa Galovičová)*

Úlohou bolo nakresliť všetky rôzne pravidelné hviezdne cestičky, ktoré prechádzajú cez všetky vrcholy. Nakreslime si teda 9-uholník a aby sme si boli istí, že žiadnu cestičku nezabudneme, poďme na to postupne. Keď vynecháme 0 vrcholov, spojíme vlastne zaradom všetky vrcholy 9-uholníka *(obr. 1)*. Niektorí z vás následne povedali, že 9-uholník nie je hviezdna cestička, ale on predsa všetky podmienky zo zadania spĺňa! Nech začneme v ľubovoľnom vrchole, kým sa k nemu opäť dostaneme, prejdeme skutočne cez všetky ostatné. Aj keď máme 9 možností, v ktorom vrchole začať, výsledná cestička je vždy rovnaká. Našli sme teda prvú hviezdnu cestičku!



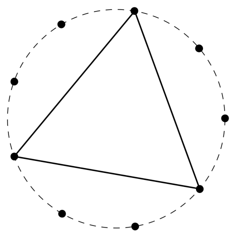
*obr. 1*



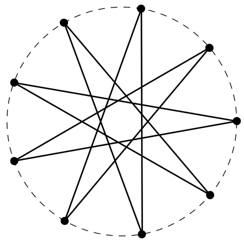
*obr. 2*

Ak budeme vynechávať vždy 1 vrchol, čiže spojíme čiarou každý druhý vrchol, tak vidíme, že opäť vychádza hviezdna cestička – kým sa dostaneme k počiatočnému vrcholu, naozaj prejdeme cez všetky ostatné *(obr. 2)*.

Skúsme teraz vynechávať 2 vrcholy, čiže spájať každý tretí. Vidíme, že nech by sme začali v ktoromkoľvek vrchole, táto cestička sa dostane do svojho začiatku už po tretej čiare a vznikne nám trojuholník. Toto teda nie je hľadaná hviezdna cestička, keďže prechádza len cez 3 vrcholy *(obr. 3)*. (Niektorí z vás sa snažili zostrojiť hviezdnu cestičku aj v tomto prípade a nakreslili do obrázku 3 takéto trojuholníky. No pozor! Takto dostaneme akurát tri nijak neprepojené cestičky, z ktorých ani jedna nespĺňa podmienky.)



*obr. 3*



*obr. 4*

Ak vynecháme vždy 3 vrcholy, vznikne ďalšia hviezdna cestička *(obr. 4)*. Skúsme teraz vynechávať vždy 4 vrcholy – aha, veď nám vyšlo to isté! Ako je to možné? Keďže sú hviezdne cestičky také pravidelné, nezáleží na tom, ktorým smerom ich kreslíme (či v smere hodinových ručičiek alebo naopak, vždy vynechávame rovnaký počet vrcholov). A všimnime si, že vynechávať 4 vrcholy je to isté, ako vynechávať 3 vrcholy v opačnom smere.

Rovnako prídeme na to, že vynechávanie 5 vrcholov je to isté ako vynechávanie 2 *(obr. 3)*, vynechávanie 6 vrcholov nám dá hviezdnu cestičku rovnakú ako vynechávanie 1 vrcholu *(obr. 2)* a vynechávanie 7 nám dá celý 9-uholník *(obr. 1)*.
Väčšie čísla už skúšať netreba – ak by sme vynechali 8 vrcholov, naša cestička prechádza len cez ten úplne začiatočný (všetky ostatné vždy preskočí). Čo ak by sme zobrali nejaké číslo väčšie ako 8 – napríklad 13. Vynechanie 13 vrcholov znamená, že spravíme jedno celé kolečko (vynecháme 9, čo je rovnaké ako keby sme nevynechali žiaden) a potom vynecháme ďalšie 4 – no túto možnosť sme už predsa skúsili! Vidíme, že vynechávanie hocijakého čísla väčšieho ako 8 nám dá rovnakú hviezdnu cestičku ako nejaké číslo od 0 po 8.
**Odpoveď:** Existujú teda 3 rôzne hviezdne cestičky *(obr. 1, 2, 4)*.

## *Príklad č. 2 (opravoval Juro Solcani)*

Máme kocku s hodnotami na stenách 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Predpokladajme, že hodnoty sú na stenách rozmiestnené ľubovoľne. Kocka má 8 vrcholov. Stena na kocke susedí so štyrmi vrcholmi. Hodnota z tejto steny teda bude započítaná v štyroch vrcholových číslach (a v štyroch nebude). To znamená, že do súčtu všetkých ôsmych vrcholových čísel bude táto hodnota zarátaná štyrikrát. To platí pre každú stenu a teda súčet vrcholových čísel na kocke sa dá vypočítať takto:

$$4x1 + 4x2 + 4x3 + 4x4 + 4x5 + 4x6 = 4 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 84.$$

Tým sme vypočítali súčet vrcholových čísel na kocke s ľubovoľne rozmiestnenými hodnotami 1, 2, 3, 4, 5 a 6.

**Odpoveď:** Súčet vrcholových čísel na spravodlivej kocke je 84. Súčet vrcholových čísel na kocke s hodnotami 1, 2, 3, 4, 5, 6 bude vždy 84 (najväčší aj najmenší súčasne), nech sú hodnoty rozmiestnené akokoľvek.

## *Príklad č. 3 (opravovali Ondro Mikuláš a Kubo Santer)*

Vašou úlohou bolo zistiť, ktoré vlaky majú Knedlík s Kapustom radi a ktoré naopak radi nemajú. Poďme sa teda na vlaky pozrieť bližšie. Začnime vlakmi, ktoré majú obidvaja radi.

Ako ste si všimli, Knedlíkova vypočítavanka má 4 slová, a teda Knedlík povie „šťastie" pri vlakoch s počtom vagónov

**1**, 1+4=**5**, 1+4+4=**9**, ...

Bude to tak preto, že slovo „šťastie" je vo vypočítavanke ako prvé, a bude sa opakovať vždy pri novom začiatku vypočítavanky. Z toho vyplýva, že ak počet vagónov vo vlaku dáva zvyšok 1 po delení štyrmi, tak Knedlík povie šťastie.

Zajac Kapusta má vypočítavanku zo 6-ich slov. Slovo „šťastie" je prvé aj v jeho vypočítavanke a bude sa opakovať pri každom jej ďalšom začiatku, takže Kapusta povie „šťastie" pri vlakoch

**1**, 1+6=**7**, 1+6+6=**13**, ...

A to sú vlaky, ktorých počet vagónov dáva zvyšok 1 po delení šiestimi. Obidvaja teda povedia „šťastie" pri vlakoch, ktorých počet vagónov dáva po delení štyrmi zvyšok 1 a aj po delení šiestimi zvyšok 1. Z toho vyplýva, že nami hľadané čísla sú o jedno väčšie, ako čísla, ktoré sú násobkom čísla 4 aj čísla 6. No my vieme, že najmenší spoločný násobok čísiel 4 a 6 je 12. A teda dĺžky vlakov, ktoré majú Knedlík a Kapusta radi, sú všetky čísla, ktoré po delení číslom 12 dávajú zvyšok 1. Sú to čísla

**1**, 1+12=**13**, 1+12+12=**25**, ...

Pozrime sa teraz na vlaky, ktoré Kapusta s Knedlíkom nemajú radi. Knedlík povie „nešťastie" pri vlakoch, ktorých počet vagónov dáva zvyšok 2 po delení štyrmi (2, 6, 10, 14, ...). Môžeme si všimnúť, že všetky tieto čísla sú párne. Je to tak preto, že tieto čísla sú o 2 väčšie ako násobok čísla 6 a platí, že 2 je párne číslo a aj násobky 6-ky sú párne. No a súčet dvoch párnych čísel je párny. My však už vieme, že Kapusta povie „šťastie" pri vlakoch, ktorých počet vagónov dáva zvyšok 1 po delení šiestimi (1, 7, 13, ...). Ale to sú čísla, ktoré dostaneme súčtom čísla 1 a násobku čísla 6. Keďže 1 je nepárne číslo, násobky 6-ky sú párne a súčet nepárneho a párneho čísla je nepárny, tak môžeme s učitosťou povedať, že čísla, pri ktorých povie Kapusta „šťastie" sú nepárne. A teda neexistuje taký vlak, pri ktorom Knedlík povie „šťastie" a Kapusta „nešťastie". Ešte treba overiť opačnú možnosť. Existuje taký vlak, že na jeho konci Knedlík povie „nešťastie" a Kapusta „šťastie"? Skontrolujme to! Zajac Kapusta povie „nešťastie" pri vlakoch s počtom vagónov, ktorý dáva zvyšok 2 po delení číslom 6 (2, 8, 14, ...). Ale aj všetky tieto čísla sú párne (číslo 2 je párne a aj násobky čísla 4 sú párne). No čísla, pri ktorých Knedlík povie „šťastie" sú nepárne, ako už vieme z prvej časti príkladu. Dokázali sme teda, že neexistuje taký vlak, ktorý zajace Knedlík a Kapusta nemajú radi.

**Odpoveď:** Zajace Knedlík a Kapusta majú radi vlaky, ktorých počet vagónov dáva zvyšok 1 po delení číslom 12 napr.: 1, 13, 25, ... Naopak neexistuje taký vlak, ktorý Knedlík a Kapusta nemajú radi.

## *Príklad č. 4 (opravoval Maťo Bachratý)*

Úlohou bolo zistiť, ako dopadol pokus vrabcov. Skúsme si na začiatok spraviť pokus aj my. Najskôr rozmiestnime Činove závažia. Keďže má byť váha v rovnováhe a hmotnosť všetkých závaží je spolu 1 + 2 + … + 8 = 36 gramov, tak na každej miske musí mať závažia s hmotnosťou 18 gramov. Môže ich rozmiestniť napríklad takto: naľavo dá 1g, 3g, 6g a 8g, napravo dá 2g, 4g, 5g a 7g. Teraz nejako rozmiestnime Ničove závažia. Rovnako ako Čin, musí mať na oboch miskách závažia s celkovou hmotnosťou 18 gramov, napríklad takto: naľavo dá 4g, 6g a 8g, napravo dá 1g, 2g, 3g, 5g a 7g.

Teraz spravíme pokus. Naľavo dáme iba tie závažia, čo majú naľavo zapísané aj Čin (1,3,6,8) aj Nič (4,6,8). Vidíme, že sú to závažia 6g a 8g. Napravo dáme iba tie závažia, čo majú napravo zapísane aj Čin (2,4,5,7) aj Nič (1,2,3,5,7). Vidíme, že sú to závažia 2g, 5g a 7g. Naľavo aj napravo teda dostaneme rovnováhu: naľavo máme 6 + 8 = 14 gramov a napravo máme tiež 2 + 5 + 7 = 14 gramov.

Vidíme teda, že nám pri pokuse vyšla rovnováha. To však ešte neznamená, že rovnováha musela vyjsť aj vrabcom. Oni mohli mať závažia rozložené úplne ináč ako my. Spravíme si ešte niekoľko pokusov a zistíme, že nám stále vychádza rovnováha. Máme teda podozrenie, že to tak bude vždy, musíme to ale dokázať – ak by bola čo by len jediná možnosť, kde nevyjde rovnováha, tak to môže byť presne tá, ktorú mali aj vrabce. Jedna možnosť ako to dokázať, je skúsiť všetky možné možnosti ako mohli mať vrabce rozložené závažia. My si ukážeme menej namáhavý spôsob:

Povedzme, že Čin aj Nič už majú zapísané, kto mal čo uložené na ľavej a na pravej miske. Zistíme, ako bude vyzerať pokus. Pozrime sa na všetko to, čo majú dokopy naľavo zapísane Čin aj Nič. Tieto závažia dávajú dokopy 36 gramov (vieme, že Čin aj Nič mali naľavo presne 18 gramov). Podobne všetko to, čo majú zapísané naľavo Čin aj Nič váži tiež 36 gramov.

Pozrime sa teraz na závažia, čo mal naľavo iba <u>Čin</u>. Keďže tieto závažia <u>Nič</u> nemal naľavo, tak ich musel mať napravo. A podobne všetky závažia, čo mal napravo iba <u>Nič</u>, musel mať <u>Čin</u> naľavo (lebo napravo ich nemohol mať ). Teda závažia, čo má naľavo iba Čin sú tie isté, ako závažia, čo má napravo iba Nič (poriadne si to premyslite).

Podobná úvaha nás dovedie k tomu, že závažia, čo má naľavo iba Nič sú tie isté, ako závažia, čo má napravo iba Čin.

Vyškrtnime teraz z ľavej strany všetky závažia čo mal naľavo iba Čin a všetky závažia čo mal naľavo iba Nič a z pravej strany vyškrtnime závažia čo mal napravo iba Nič a závažia čo mal napravo iba Čin. Z predchádzajúcich úvah vieme, že sme naľavo aj napravo vyškrtli presne tie isté závažia. Tým pádom aj po škrtaní budú naľavo aj napravo rovnaké hmotnosti (pred škrtaním bola tam aj tam 36 gramov).

Teraz si už len uvedomme, čo nám vlastne zostalo. Naľavo máme u Čina aj Niča už presne tie závažia, čo mali vľavo rovnaké (všetko ostatné sme vyškrtli). Podobne napravo máme iba to, čo mali napravo Čin aj Nič vpravo rovnaké. Teda naľavo aj napravo máme presne závažia z pokusu, len každé dvakrát. Ale ak sú naľavo aj napravo rovnaké hmotnosti, tak budú rovnaké aj po vydelení dvoma, takže naozaj pri pokuse vyjde rovnováha.

Tento postup je vcelku zložitý, preto si ho predvediem aj na našom prvom pokuse:

| | VĽAVO | VPRAVO | |
|---|---|---|---|
| ČIN: | **1,3**,6,8 | 2,<u>4</u>,5,7 | To, čo má **naľavo** iba Čin je to isté, čo má **napravo** iba Nič |
| NIČ: | <u>4</u>,6,8 | **1**,2,**3**,5,7 | To, čo má <u>naľavo</u> iba Nič je to isté, čo má <u>napravo</u> iba Čin |

**1** + **3** + 6 + 8 + <u>4</u> + 6 + 8 = 36 = 2 + <u>4</u> + 5 + 7 + **1** + 2 + **3** + 5 + 7

hrubé aj podčiarknuté závažia môžeme vyškrtnúť, lebo sú na ľavej aj pravej strane

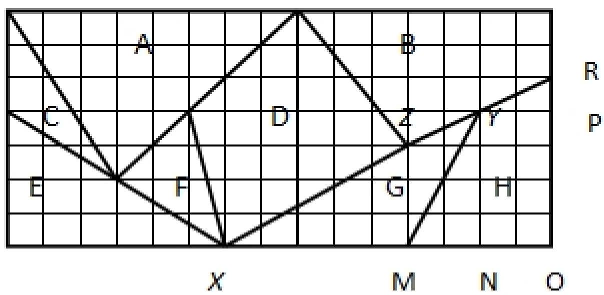
6 + 8 + 6 + 8 = 2 + 5 + 7 + 2 + 5 + 7

2 x ( 6 + 8 ) = 2 x ( 2 + 5 + 7 )

6 + 8 = 2 + 5 + 7 (presne takto vyzeral aj pokus)

**Odpoveď:** Váha sa určite dostala do rovnováhy.

## *Príklad č. 5 (opravovala Kaťa Jasenčáková)*

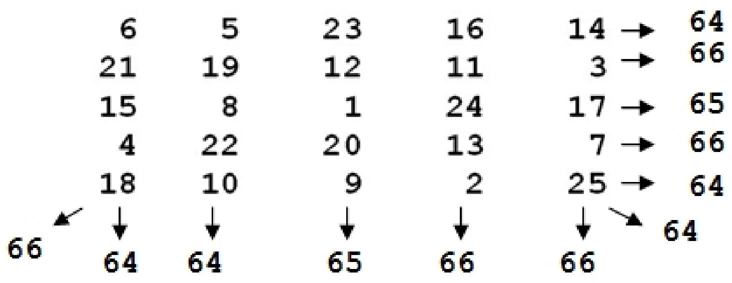



iť úlomky od najmenšieho po najväčší, musíme zistiť ich
ukážeme ten najviac používaný. Vzorec na obsah
no nepoznáte, skúste si premyslieť prečo to tak je.
osah obdĺžnika.)
C a E. Obsah trojuholníka A je $S_A$ = (5 x 8) ÷ 2 = **20**,
**2**.
kov B,D,F vypočítame tak, že ich vpíšeme do obdĺžnikov
žeme vpísať do obdĺžnika 7 x 4. Vzniknú nám dva
2) ÷ 2 = 4, ktoré musíme odrátať.
Teda $S_B$ = (7 x 4) − 6 − 4 = **18**. Podobne útvar D vpíšeme do obdĺžnika 6 x 7 a odrátame zbytočné trojuholníky, takže $S_D$ = (6 x 7) − (3 x 3) ÷ 2 − (1 x 4) ÷ 2 − (5 x 3) ÷ 2 − (3 x 4) ÷ 2 = **22** a podobne F vpíšeme do obdĺžnika 3 x 4 a $S_F$ = (3 x 4) − (2 x 2) ÷ 2 − (3 x 2) ÷ 2 − (1 x 4) ÷ 2 = **5**.
Ostali nám 2 časti, G a H. Pri úlomku G si mnohí nevšimli, že to nie je trojuholník, ale štvoruholník. Na obrázku to tak síce nevyzerá, no XY nie je úsečka, lebo ak ZY je uhlopriečka obdĺžnika 1*2, tak aj úsečka XZ by musela byť uhlopriečkou obdĺžnikov 1*2, čo však nie je. Takže časť G môžeme rozdeliť na 2 trojuholníky XMZ a MZY, ktorých obsahy vieme vypočítať.
Teda $S_G = S_{XMZ} + S_{MZY}$ = (5 x 3) ÷ 2 + (3 x 2) ÷ 2 = **10,5**. Podobne časť G môžeme rozdeliť na 2 trojuholníky a obdĺžnik, potom $S_H = S_{MNY} + S_{NOPY} + S_{YPR}$ = (2 x 4) ÷ 2 + (2 x 4) + (2 x 1) ÷ 2 = **13**.
Overme, či je súčet obsahov rovný obsahu čokolády: 20 + 4,5 + 12 + 18 + 22 + 5 + 10,5 + 13 = 105
Spočítali sme obsahy všetkých úlomkov, teraz ich stačí len zoradiť: 4.5<5<10.5<12<13<18<20<22, teda C<F<G<E<H<B<A<D
**Odpoveď:** Poradie úlomkov od najmenšieho po najväčší je C, F, G, E, H, B, A, D.
*<u>Poznámka</u>* : Mnohým z vás sa stalo, že ste nejaký obsah nevyrátali správne. Na to je dobrá skúška správnosti. Zistiť, či súčet všetkých obsahov je 105, alebo u tých, ktorí nejaký obsah vyrátali odpočítaním zvyšných obsahov od celku, vyrátať si ho aj priamo.
Tiež treba dávať pozor na zápis: 4 x 6 = 24 ÷ 2 = 12. Tento zápis je nesprávny, lebo 4 x 6 = 24, ale 24 sa nerovná 12. Správny je zápis (4 x 6) ÷ 2 = 24 ÷ 2 = 12 alebo 4 x 6 = 24 a 24 ÷ 2 = 12.

## *Príklad č. 6 (opravovala Betka Bohiníková)*

Najprv si zistíme, aký by mal byť súčet v každom riadku, stĺpci a uhlopriečke. Keďže do tabuľky ukladáme všetky čísla od 1 do 25 (ich súčet je 325) potrebujme mať vždy rovnaký súčet na 5

kartičkách (pričom mám celkový súčet rozdelený na 5 skupín kartičiek po 5). Takže súčet v každom riadku, stĺpci a uhlopriečke bude 65 ( = 325 ÷ 5).
Teraz sa pozrime na súčty v našej tabuľke:
Môžeme si všimnúť, že tretí riadok aj stĺpec majú už súčet 65. Keďže potrebujeme opraviť veľa súčtov presunutím len 4 kartičiek, <u>skúsime tretí riadok aj stĺpec už nechať na pokoji</u>. Zvyšných 10 súčtov potrebujeme zmeniť. Môžeme vymeniť iba 4 kartičky a preto najprv porozmýšľame ako vlastne tá výmena funguje. Keďže nás zaujíma iba zmena súčtu, <u>neoplatí sa nám vymieňať kartičky v tom istom</u>




...r. čísla 13 a 14. Spĺňajú zatiaľ všetky
...čet zväčší o jedna ma 67 (keďže miesto 13 je
...a 65. Ale takisto sa mi zmenia aj riadky, 64 na
...e jeden súčet, ale ostatné tri nie, pritom
...í.
...sú v rôznom stĺpci, riadku alebo uhlopriečke)
...ky, tak 5 a ak sú obidve z uhlopriečky, tak 6 súčtov).
Keď chcem dostať všade ten istý súčet, potrebujeme 5 súčtov zmenšiť o jedna a 5 zväčšiť o jedna.

Keďže dva z tých súčtov sú na uhlopriečke, určite budem 2 kartičky vymieňať z uhlopriečky, a tie zvyšné dve mimo nej, aby sme už nepokazili tie dobré súčty. Z toho vychádza presne 10 zmien, a preto po každej zmene potrebujeme dostať správne súčty.
Takže ak si vyberieme kartičku z riadku kde chceme súčet zmenšiť, potrebujeme ju vymeniť s kartičkou, kde ho chceme zväčšiť. Rovnako to platí pre stĺpce.
Pozrime sa na uhlopriečky, tam potrebujeme, aby sa nám zhodovali tri súčty. Jediné čísla, čo to spĺňajú sú 11 a 6. Keďže ich rozdiel nie je jedna, tak nemôžeme vymeniť tieto dve medzi sebou. Aby sedeli súčty, potrebujeme 6 vymeniť za 5 a 11 za 10. Ak sa pozrieme do našej tabuľky touto zmenou dostaneme všetky súčty rovné 65. Vďaka tomu, že na uhlopriečkach sa dali zmeniť len dve čísla (pri našich podmienkach) dostali sme jediné riešenie.

**Odpoveď:** Jediný spôsob ako vymeniť čísla, je vymeniť 6 za 5 a 11 za 10.