# SEZAM, školský rok 2013/14, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
práve k vám dorazili zadania druhej letnej série tohtoročného SEZAMu. Guliver a jeho dvaja kamaráti sa veľmi potešili všetkým vaším riešeniam. Na oplátku vás čakajú ďalšie príhody z ostrova archeológov a nové úlohy. Ak si chcete predtým než sa do nich pustíte rozhýbať svoje matematické svaly, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na vynovenej stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

## *Príklad č. 1* (opravoval Feri Dráček)

Vieme nákupnú cenu pre množstvo 5 lakťov a predajnú cenu pre množstvo 7 lakťov. Ak však chceme hovoriť o zisku, tak potrebujeme zistiť nákupnú a predajnú cenu pre jednotný počet lakťov. Mohli by sme napríklad zistiť nákupnú aj predajnú cenu pre množstvo 10 lakťov. Nákupná cena by bola 7 + 7 = 14 zlatiek, lebo každých 5 lakťov z desiatich by stálo 7 zlatiek. No predajnú cenu už tak ľahko nezistíme, na to by sme museli zistiť koľko krát sa 7 lakťov zmestí do desiatich. Tu by do hry vstúpili zlomky a desatinné čísla a úloha by začala byť veľmi zložitá. Skúsme pre to iný prístup.

Nákupnú cenu vieme ľahko zistiť, ak je počet lakťov násobok piatich. Naopak predajnú cenu vieme ľahko zistiť, keď je počet lakťov násobok siedmych. Zisk teda vieme ľahko zistiť pre taký počet lakťov, ktorý je násobkom aj piatich aj siedmych. Najmenšie takéto číslo je 35. Tie obchodník nakúpi za 49 zlatiek a predá za 55 zlatiek. Pri 35 lakťoch teda zarobí 6 zlatiek (55 - 49).

Celkovo zarobil 120 zlatiek, čo je 20-krát viac ako by zarobil na 35 lakťoch. Dokopy teda musel nakúpiť 20-krát viac než 35 lakťov, čo je $35 \cdot 20 = 700$ lakťov. Môžeme si ešte overiť, či sme sa náhodou nepomýlili. Keďže $700 = 5 \cdot 140$, tak nákup 700 lakťov obchodníka stojí $140 \cdot 7 = 980$ zlatiek. Na predaji 700 lakťov papyrusu zarobí $100 \cdot 11 = 1100$ zlatiek. Celkový zisk je teda naozaj $1100 - 980 = 120$ zlatiek.
***Obchodník kúpil 700 lakťov papyrusu.***

## *Príklad č. 2* (opravoval Michal Hagara)

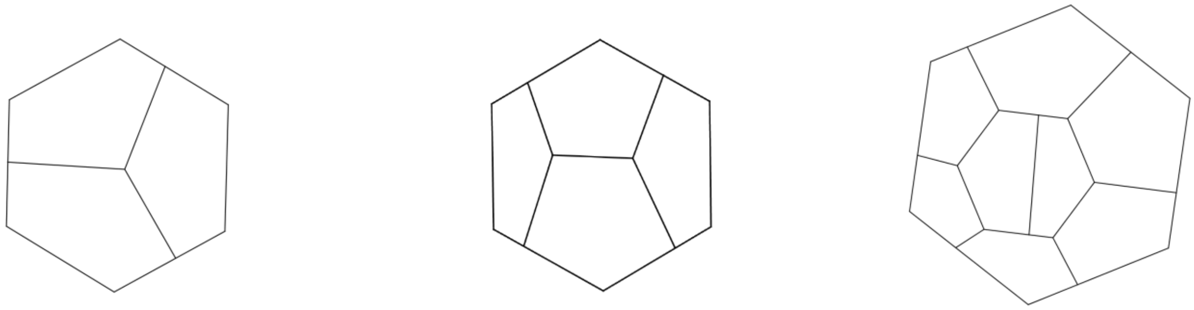
V prvom rade si treba ujasniť, aké typy mincí mohol mať Jonatán vo vrecku. V zadaní sa spomínajú toliare a groše, ale spomína sa tam aj, že na archeologickom trhu sa platí aj rôznymi ďalšími starými mincami. Jonatán teda mohol mať vo vrecku toliare a groše, ale kľudne tam mohol aj denáre, dukáty a iné staré mince. Veľa z vás riešilo úlohu len s toliarmi a grošmi a na iné mince zabudlo.

Keď už vieme, že v Jonatánovom vrecku sa mohli nachádzať všetky možné staré mince, môžeme sa pustiť do riešenia. Vieme, že medzi ľubovoľnými tromi mincami, ktoré vytiahne Jonatán z vrecka, je aspoň jeden toliar. To však znamená, že má vo vrecku najviac dve mince, ktoré nie sú toliare. Keby ich mal viac, tak by vedel vytiahnuť tri mince, z ktorých by ani jedna nebola toliar.
Ďalej vieme, že medzi ľubovoľnými štyrmi mincami, ktoré vytiahne z vrecka, je aspoň jeden groš. Čo vlastne znamená, že má vo vrecku najviac tri mince iné ako groš.

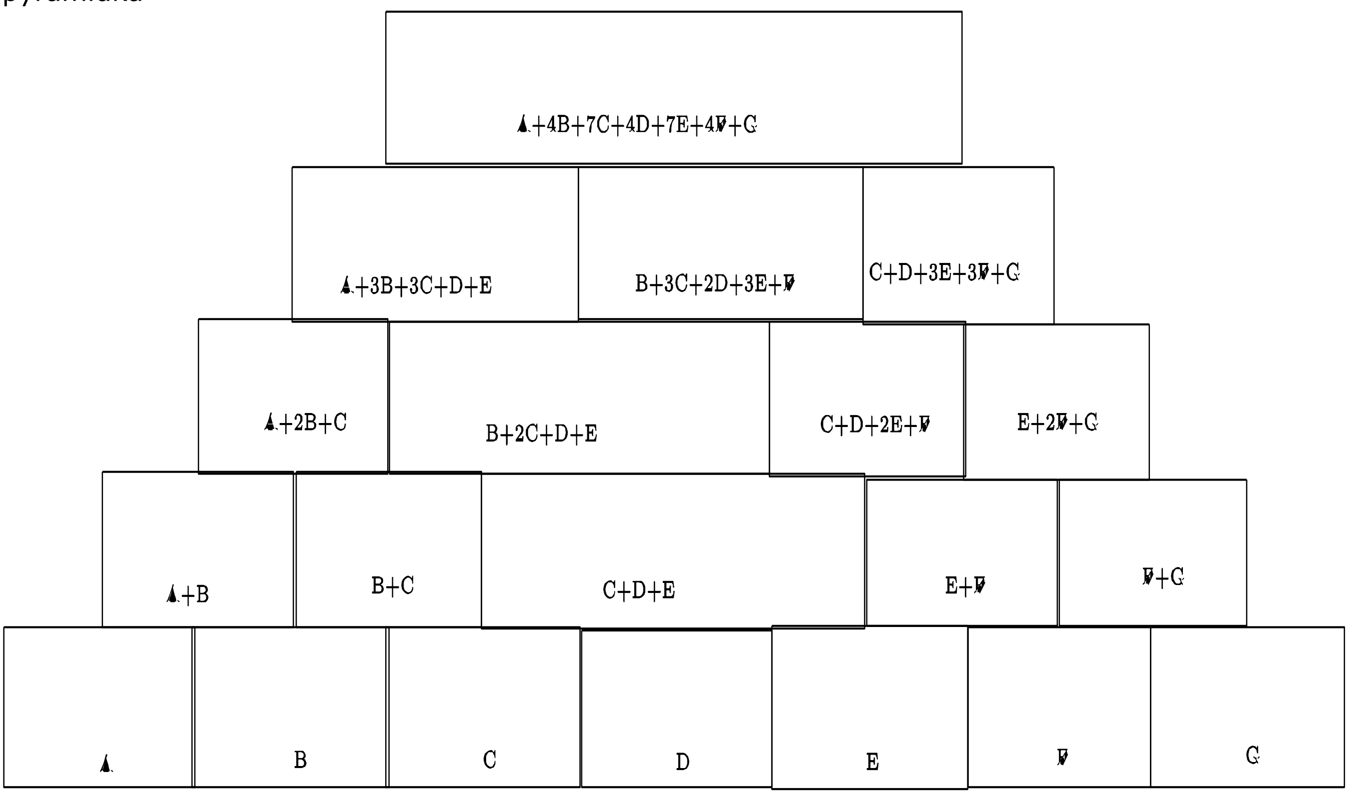
Pozrime sa teraz na tých päť mincí, ktoré vytiahol Jonatán z vrecka. Najviac dve z nich môžu byť iné ako toliar, čiže aspoň tri z nich sú toliare. Najviac tri z nich môžu byť iné ako groš, čiže aspoň dve z nich sú groše. Podarilo sa mu teda vytiahnuť 3 toliare a 2 groše, čo už je spolu 5 mincí, takže ich viac už nevytiahol.

A čo zvyšné mince? Už vieme o dvoch minciach, ktoré nie sú toliare a o troch minciach, ktoré nie sú groše. Žiadna ďalšia minca už teda nemôže byť iná ako toliar ani ako groš, čiže žiadnu ďalšiu mincu už Jonatán vo vrecku mať nemôže. V konečnom dôsledku sa nám teda podarilo zistiť, že má len toliare a groše a žiadne iné staré mince nemá.
***Jonatán vytiahol z vrecka 3 toliare a 2 groše. Potom mu už vo vrecku nezostala žiadna minca.***

***Príklad č. 3*** *(opravovali Aďa Santrová a Betka Bohiníková)*
Spôsobov, ktorými sa záhrada dala rozdeliť, ste našli naozaj veľa. A myslím tým nekonečne veľa. Niektorý boli veľmi zvedaví a nestačili im len tri spôsoby. Medzi najľahšie spôsoby patrilo rozdelenie na 2 konvexné (to znamená, že všetky vnútorné uhly sú menšie ako 180°) päťuholníky jednou úsečkou spájajúcou dve protiľahlé **strany** (nie vrcholy). Šesťuholník bolo možné rozdeliť aj na 3 päťuholníky (tromi úsečkami zo stredu), na štyri, ... Medzi najzaujímavejšie patrili rozdelenia, keď sa do šesťuholníka nakreslil päťuholník alebo dokonca šesťuholník, ktorý sa potom dal znova deliť! A to až donekonečna. Na obrázkoch je pár možných riešení.

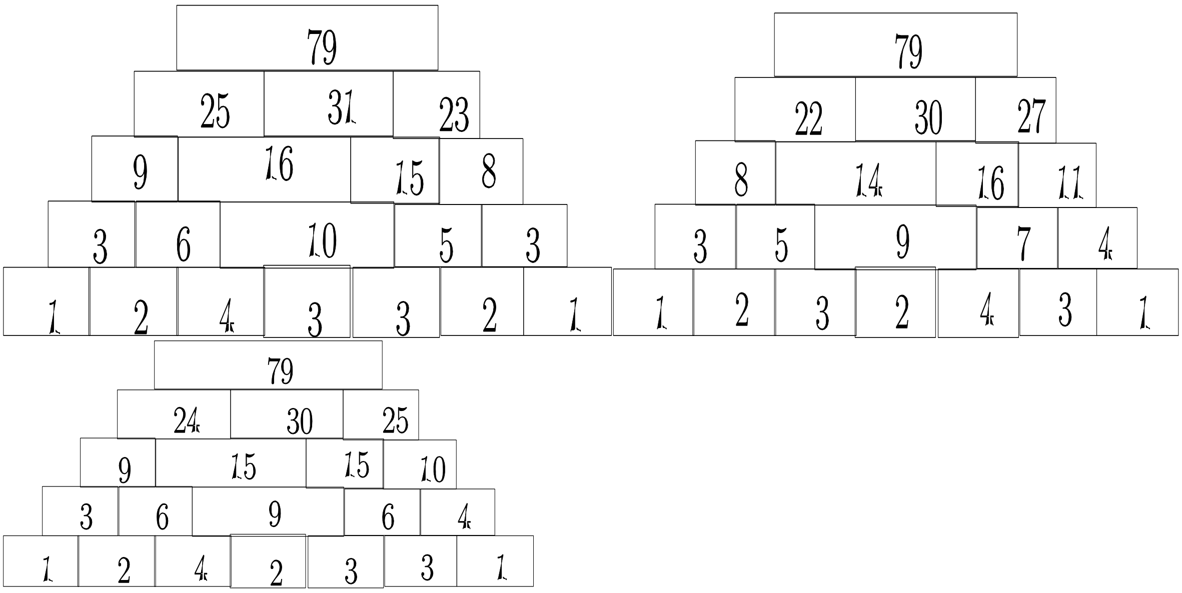


***Príklad č. 4*** *(opravovali Denisa Múthová a Adam Kňaze)*
Traja kamaráti sa na ostrove dostali ku pyramíde. Táto pyramída je poskladaná z kamenných blokov , tj. väčších a menších obdĺžnikov v piatich radoch. Našou úlohou bude najskôr do spodnej rady poukladať čísla 1,1,2,2,3,3,4 tak aby vo vrchnej rade vzniklo najväčšie číslo. Číslo vo vyššej rade je súčtom čísel pod ním, s ktorými ma spoločnú stranu.
V akom poradí vieme doplniť do spodného radu dané čísla?
Veľmi pekný a jednoduchý postup je zvoliť si do poslednej rady namiesto čísel písmenká za sebou A,B,C,D,E,F,G. Následne ich sčítavame v radách nad sebou, postupne nám vznikne takáto pyramídka




Na vrchu dostaneme súčet A+4B+7C+4D+7E+4F+G. Písmenka udávajú, koľkokrát sa číslo vyskytuje v sčítavaní. Aby bol výsledok čo najväčší, k najväčším násobkom písmenok priradíme najväčšie čísla.
Za C a E dosadíme teda 4 a 3. Sú dve možnosti ako to spraviť:
buď C=3 a E=4 alebo C=4 a E=3.
Ďalšie najväčšie násobky sú pri B,D a F, dosadíme za ne teda 3, 2 a 2 (tri najväčšie čísla, ktoré nám ešte ostali). Máme tento krát tri možnosti dosadenia:
B=3, D=2, F=2 alebo B=2, D=3, F=2 alebo B=2, D=2, F=3.

Za A a G dosadíme zvyšné jednotky. Keď vieme spodnú sedmicu tak môžeme postupne vyplniť celú pyramídu. Dostaneme tieto tri možnosti, plus ďalšie tri ako ich zrkadlový obraz.




***Dokopy je teda 6 možností usporiadania spodného riadku tak, aby bol hore najväčší možný súčet 79: 1,2,3,2,4,3,1; 1,2,3,3,4,2,1; 1,2,4,3,3,2,1; 1,2,4,2,3,3,1; 1,3,3,2,4,2,1 a 1,3,4,2,3,2,1.***
***Pri hocijakom inom usporiadaní spodného riadku dostaneme menší súčet.***

## *Príklad č. 5* (opravoval Samo Tomašec)

Tento príklad sa dal riešiť viacero spôsobmi, ukážeme si najelegantnejší v tom zmysle, že sa v ňom vypisuje najmenej čísel.

Zaoberajme sa najprv trojicami cifier (nezáleží na ich poradí), kde je jedna cifra súčtom zvyšných dvoch. Vezmime si cifru 9. Tá sa dá napísať ako 0+9, 1+8, 2+7, 3+6, 4+5. Obrátené súčty nepíšeme, lebo by sa opakovali rovnaké trojice (napríklad trojice 9,1,8 a 9,8,1 sú rovnaké). Keď si vezmem cifru 8, tak jej súčty budú 0+8, 1+7, 2+6, 3+5, 4+4. Všimnime si, že keď sa posúvame s cifrou o jedno dole, tak sa pri prechode na párnu cifru počet možných kombinácii, ako ju rozložiť na súčet dvoch cifier, nezmení. Naopak pri prechode na nepárnu cifru sa počet zmení. Teda pre 9 máme 5 možností, pre 8 máme 5 možností, pre 7 sú 4 atď.. Dokopy ich je 5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 = 29.

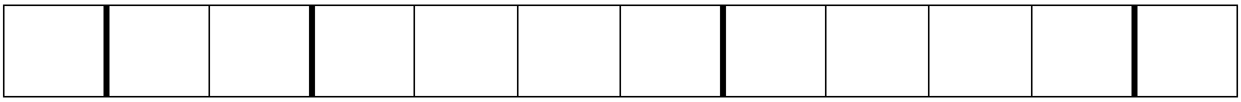
Trojicu cifier môžeme zapísať ako trojciferné číslo viacerými spôsobmi. Rozdeľme si tieto trojice na tri skupiny:

**1. skupina** obsahuje trojice, ktoré majú jednu z cifier 0. Zvyšné dve cifry musia byť rovnaké (ináč by neplatila podmienka, že súčet niektorej dvojice cifier nám dá tretiu). Trojciferné číslo z takýchto troch cifier vieme napísať práve 2 spôsobmi (číslo nezačína 0, teda napr. 101, 110). Táto skupina má práve 9 členov (jedna cifra je nula, zvyšné dve sú rovnaké a nenulové), takže dostávame 2 · 9 = 18 vyhovujúcich čísiel.
**2. skupina** obsahuje také trojice, ktoré majú 2 cifry rovnaké a neobsahujú cifru 0. Také čísla sú presne 4, lebo posledná cifra je súčet dvoch rovnakých cifier. Možnosti sú teda 1,1,2; 2,2,4; 3,3,6 a 4,4,8. Kombinácie pre jedno číslo sú tri (napr. 121, 211, 112), dokopy teda máme 3 · 4 = 12 vyhovujúcich čísiel.
**3. skupina** obsahuje zvyšné trojice. Ľahko si uvedomíme, že sú to tie, čo majú všetky cifry rôzne a nenulové. Dokopy ich je 29 – 9 – 4 = 16 (všetky trojice mínus trojice z prvej a druhej skupiny). Kombinácii pre každú trojicu je tu 6 (napr. 123, 132, 213, 231, 321, 312). Máme teda 6 · 16 = 96 vyhovujúcich čísel.
***Dokopy teda máme 18 + 12 + 96 = 126 vyhovujúcich čísel*.**

*Poznámka: Časté chyby boli, že ste zabudli na jednu z týchto skupín. Tiež nebolo za plných päť bodov, ak ste čísla vypisovali a pri vypisovaní sa pomýlili.*

***Príklad č. 6*** (*opravovala Kaťa Jasenčáková*)

Chceme zistiť, koľko najmenej zárezov potrebujeme urobiť na paličke dlhej 12 cm, aby sme dokázali odmerať všetky vzdialenosti od 1 cm po 12 cm (v celých centimetroch).
Stačilo by nám 0 zárezov? Zjavne nie, lebo vieme odmerať iba jednu dĺžku a to 12 cm.
Koľko dĺžok vieme odmerať ak máme 1 zárez? No od začiatku paličky po zárez, od začiatku po koniec paličky a od zárezu po koniec paličky. To sú najviac 3 rôzne vzdialenosti (ak by sme dali zárez do stredu paličky, tak vieme dokonca odmerať iba dve hodnoty - 6 cm a 12 cm).
Tak skúsme 2 zárezy. Ľahko spočítame, že vieme odmerať najviac 6 rôznych vzdialeností – od začiatku po prvý zárez, od začiatku po druhý zárez, od začiatku po koniec, od prvého po druhý zárez, od prvého zárezu po koniec a od druhého záveru po koniec.
Vyskúšajte si, že s 3 zárezmi vieme odmerať najviac 10 rôznych vzdialeností. Takže budeme potrebovať aspoň 4 zárezy. Tu narátame 15 vzdialeností, no keďže na 12 cm paličke je iba 12 rôznych vzdialeností, niektoré z týchto 15 nameraných vzdialeností musia byť rovnaké. To nám však nevadí, nám stačí, ak nájdeme také umiestnenie zárezov, kde budú všetky vzdialenosti od 1 cm po 12 cm. Keď sa s tým chvíľku pohráme, určite nejaké vhodné umiestnenie zárezov nájdeme. Napr. na prvom, treťom, siedmom a jedenástom centimetri (tak ako na obrázku).



***Potrebujeme aspoň 4 zárezy a s nimi sa nám už podarí vyrobiť vhodné pravítko.***