JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2013/14, vzorové riešenia 2. letnej série

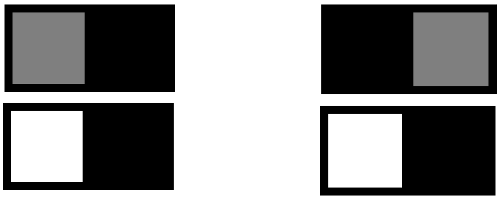
Milí riešitelia,
do rúk sa k vám práve dostali zadania tretej, a teda poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Gustáv, Adela, Jonatán aj atléti z ostrova športovcov sa veľmi potešili všetkým vaším riešeniam. Zároveň na vás čaká posledná sada úloh, s ktorými potrebujú pomôcť. Využite poslednú možnosť zabojovať o čo najlepšie umiestnenie vo finálnom poradí. Tí ktorým sa bude dariť sa môžu tešiť na letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 11. až 20. augusta na Fačkovskom sedle. Pred tým než sa pustíte do riešenia úloh, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, určite vám to pomôže.
Nakoniec vás ešte chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravoval Mojo Majdiš)

Stoly môžeme ukladať dvomi spôsobmi – zvislo a vodorovne.
Ak ich ukladáme zvislo, tak ten naľavo musí byť bielo-čierny a bielou časťou otočený dolu. Druhý stôl bude teda napravo, no je jedno, či bude sivá strana hore alebo dolu. Vzniknú nám tak dve možnosti.

Podobne, ak stoly ukladáme vodorovne, tak ten bielo-čierny musí byť dole s bielou časťou naľavo. Čierno-sivý stôl bude hore a je nám jedno, či sivou stranou naľavo alebo napravo. Opäť tak vzniknú dve možnosti.



Dokopy teda dostávame štyri možnosti.

Príklad č. 2 (opravoval Didi Hudec)

Začneme tým, že si spomedzi diskov 1,2,…,8 vytvoríme dvojice, ktoré nemôžu byť spolu: 1 a 2, 2 a 4, 3 a 6, 4 a 8. Vidíme teda, že dvojica 1 a 4 musí byť spolu v jednom vreci a dvojica 2 a 8 v druhom. Keďže 3 a 6 musia byť v rôznych vreciach, vieme, že v každom vreci musia byť aspoň tri disky. Zároveň platí, že čísla 5 a 7 môžeme umiestniť ľubovoľne, nakoľko nemajú žiadne obmedzenia. Potrebujeme teda preskúmať dve situácie: a) v jednom vreci sú 3 disky a v druhom 5, b) v oboch vreciach sú po 4 disky.

a) Vyberám tri disky, pričom jeden musí byť z dvojice 3 a 6 a zvyšné dva buď 1 a 4 alebo 2 a 8.
   To sú spolu 4 možnosti: 1, 3, 4 // 1, 4, 6 // 2, 3, 8 // 2, 6, 8
   K jednotlivým trojiciam dávame zvyšné disky do druhého vreca
b) Vyberám štvorice diskov, pričom vieme, že jedna štvorica musí pozostávať z 1,4 a jedného disku z dvojice 3 a 6 plus ešte jeden z dvojice 5 a 7 (aby boli spolu 4). Dostávame opäť 4 možnosti: 1, 3, 4, 5 // 1, 3, 4, 7 // 1, 4, 5, 6 // 1, 4, 6, 7

Keďže jednotlivé vrecia medzi sebou nerozlišujeme dostávame spolu 8 možností.

Príklad č. 3 (opravovali Ajka Bachratá a Baška Marečáková)

Skúsime sa spolu pozrieť na riešenie príkladu pomocou rozumného skúšania rôznych počtov fanúšikov. Zo zadania vieme, že v bufete nastali štyri zmeny v počte fanúšikov:

1. Odišlo 5 modrých. Teda modrých fanúšikov musí byť aspoň 5, inak by nemal kto odísť.

2. Na každého modrého fanúšika zostali 2 žltí. Žltých bol dvakrát viac ako modrých, teda párny počet.

3. Odišlo 25 žltých fanúšikov. Teda žltých bolo aspoň 25.

4. Na každého žltého zostali 3 modrí. Po odchode 5 modrých bol počet modrých deliteľný 3.

Najskôr vyskúšame 26 žltých fanúšikov (je to prvé párne číslo väčšie ako 25). Keď chceme mať na začiatku 26 žltých, tak k nim potrebujeme 18 modrých. To preto, že keď odíde 5 modrých mali by byť na každého modrého (18 – 5 = 13) dvaja žltí (13 · 2 = 26). Takže na začiatku máme 26 žltých a 18 modrých. Potom (v 2. zmene) odíde 5 modrých, takže máme 26 žltých a 13 modrých (žltých je dvakrát viac). Potom (v 3. zmene) odíde 25 žltých, takže ostane 1 žltý a 13 modrých fanúšikov. Teraz potrebujeme aby bolo modrých 3-krát viac ako žltých, čo ale neplatí. Takže potrebujeme skúšať ďalej.
Ďalšie pokusy si zapíšeme do tabuľky, pričom tam zaznamenáme počty Ž (žltých) a M (modrých).

	Ž	M	Ž	M	Ž	M	Ž	M	Ž	M	Ž	M
Na začiatku	26	18	28	19	30	20	32	21	34	22	36	23
Odíde 5 modrých	26	13	28	14	30	15	32	16	34	17	36	18
Odíde 25 žltých; na konci	1	13	3	14	5	15	7	16	9	17	11	18
Je modrých 3-krát viac ako žltých?	13	krát	4,66	krát	3	krát	2,28	krát	1,88	krát	1,63	krát

Pri treťom pokuse sme našli počty fanúšikov, pre ktoré funguje zadanie. A to 30 žltých a 20 modrých. Okrem toho si môžeme všimnúť, že keby sme ďalej zvyšovali počet žltých fanúšikov na začiatku, tak na konci bude počet žltých stále menším násobkom počtu modrých fanúšikov. Takže už pre žiadne väčšie počty nemôže vyjsť , že bude trikrát viac modrých ako žltých.
Teda jediné riešenie je pre začiatočné počty 20 modrých fanúšikov a 30 žltých fanúšikov.

Príklad č. 4 (opravovali Maťka Kudelčíková a Ivka Hrivová)

Najprv si skúsime určiť, aký bude súčet čísel v jednotlivých riadkoch, stĺpcoch a diagonálach po zámene. To sa dá urobiť tak, že sa sčítame všetky čísla v tabuľke a vydelíme tento súčet číslom 4 (pretože riadky aj stĺpce sú 4). Takto zistíme, že súčet v každom riadku, stĺpci aj na každej diagonále bude po zámene 134 ÷ 4 = 34.
Dá sa na to prísť aj iným spôsobom. Keď zrátame všetky súčty v riadkoch, stĺpcoch a diagonálach, tak dostaneme súčty 32, 34 a 36. Zamenením dvoch čísel vieme zmeniť iba niektoré zo súčtov, nie všetky. Na konci bude teda v každom stĺpci, riadku aj na každej diagonále súčet buď 32, alebo 34, alebo 36. No ak by to bolo 32 alebo 36, tak by súčet všetkých čísiel v tabuľke bol buď menší, alebo väčší než súčet čísiel v tabuľke pred zámenou a to je hlúposť.

Teraz potrebujeme zistiť, ktoré čísla treba vymeniť aby sme všade dostali súčet 34. Dá sa to spraviť viacerými spôsobmi, my si ukážeme dva z nich.

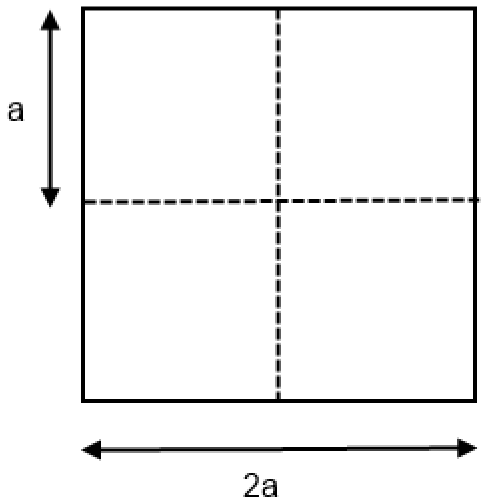
1. spôsob:
Súčet 32 je v druhom riadku, druhom stĺpci a na diagonále idúcej z ľavého horného rohu. Jedinou výmenou musíme všetky tieto tri súčty zväčšiť o 2. Preto potrebujeme nájsť číslo spoločné pre všetky tieto tri súčty a vymeniť ho za číslo o 2 väčšie. Jediné číslo, ktoré je v druhom riadku, druhom stĺpci a na spomínanej diagonále je číslo 13. Súčet musíme zvýšiť o dva, a tak ho vymeníme za 15. Teraz ešte musíme overiť, či je naozaj všade rovnaký súčet. Po chvíli počítania zistím, že naozaj je všade súčet 34.
Zistili sme, že počet loptičiek vo vymenených priehradkách je dokopy 13 + 15 = 28.

2. spôsob:
Môžeme postupovať aj tak, že si na začiatku vyškrtneme všetky políčka v riadkoch, stĺpcoch aj diagonálach so súčtom 34, pretože vieme, že v nich nič nemôžeme meniť (hocijaká výmena by nám buď zvýšila alebo znížila súčet, no ten má byť po výmene presne 34).
Po vyškrtaní nám ostanú 3 čísla- 12,13 a 15. A teraz buď všetky dvojice vyskúšame (nie je ich veľa, sú iba 3), alebo si povieme, že čísla, ktoré meníme, musia mať rozdiel 2 (zamyslite sa prečo) a to sú z týchto troch možností iba čísla 13 a 15 ☺. Samozrejme nezabudneme overiť, či naozaj po výmene bude všade rovnaký súčet a dostaneme rovnaké riešenie ako pri prvom spôsobe.

Príklad č. 5 **(***opravovala Sisa Nepšinská***)**

Poznámka opravovateľa: Vysvitlo, že zadanie tohto príkladu bolo mierne nejasné a zopár z vás z vety: „veľký biely štvorec je 4 krát väčší ako malý biely štvorec," usúdilo, že sa hovorí o stranách a nie o obsahoch štvorcov. Bez ohľadu na to, s akým predpokladom ste nakoniec počítali, hodnotil sa váš postup pri riešení. Ak si nájdete čas, tak si vyskúšajte vyriešiť úlohu aj tým druhým spôsobom, než bol váš :) . Do budúcna nezabudnite, že ak máte akékoľvek nejasnosti, tak sa nás nebojte opýtať, či už na nástenke na stránke www.sezam.sk , alebo e-mailom na adrese sezam@sezam.sk

Tak, a teraz už samotné riešenie príkladu:
Označme si stranu celého ihriska **s**, stranu malého štvorca **a** a stranu veľkého štvorca **b**. Celé ihrisko je štvorec s plochou s · s = 196 km^2. Preto s = 14 km. Vieme, že obsah veľkého štvorca je 4 krát väčší ako obsah malého, teda 4 · a · a = b · b . Ľavá strana sa na súčin dvoch rovnakých čísel dá rozložiť len ako (2 · a) · (2 · a) , preto b = 2 · a . Pekne to môžeme vidieť, aj keď rozdelíme štvorec na 4 rovnaké menšie štvorce ako na obrázku:



Náš najmenší štvorec má obsah 1 km^2 a jeho strana je preto tiež dlhá 1 km (1 = 1 · 1).
Teraz vidíme, že s = a + b – 1 , keďže malý a veľký štvorec sa prekrývajú na 1 km (ktorý sme v súčte a + b zarátali dvakrát). Dosadíme b = 2a a upravíme:

$$a + 2a - 1 = 14;$$
$$3a = 15;$$
$$a = 5 \text{ km}$$

Potom b = 2 · 5 = 10 km. Obsah menšieho štvorce je preto 5 · 5 = **25 km^2** a veľkého 10 · 10 = **100 km^2**.
Vidíme, že oba obdĺžniky majú kratšiu stranu dlhú 14 – 10 = 4 km a dlhšiu 14 - 5 = 9 km, preto sú rovnaké a ich obsah je **36 km^2**. Keď spravíme skúšku správnosti, sčítame tieto obsahy a odčítame 1 kvôli dvakrát zarátanému obsahu najmenšieho štvorca, ktorý je súčasťou malého aj veľkého štvorca s obsahmi 25 a 100.
Dostaneme 25 + 100 + 36 + 36 - 1 = 196 km^2 , takže toto riešenie naozaj vyhovuje
(pri počítaní s dĺžkami strán je postup rovnaký, len namiesto b = 2 · a sa počíta s rovnosťou b = 4 · a).

Príklad č. 6 (opravoval Maťo Bachratý)

Skôr než sa pustíme do riešenia, zopakujme si jednu dôležitú vec. Viacerý z vás našli jedno, prípadne dve riešenia a prehlásili úlohu za vyriešenú. No ak nie je v zadaní vyslovene napísané „nájdite iba jedno riešenie," tak vždy treba nájsť všetky riešenia a navyše vysvetliť, prečo sú naozaj všetky :)

Úloha sa dala riešiť viacerými zaujímavými spôsobmi. Najčastejší spôsob využíval rovnice. Povedali ste si, že pred presúvaním boli počty hráčov v družstvách A, B, C, D a E. Potom ste postupne zistili, koľko bude hráčov v jednotlivých družstvách po popresúvaní a zostavili si rovnice (počty hráčov v tímoch po presunutí mali byť rovnaké). Ich vyrátaním ste nakoniec dospeli k všetkým možným riešeniam.

My si ukážeme veľmi pekné riešenie Veroniky Bergerovej, ktoré sa rovniciam vyhlo:

Pozrime sa na úlohu odzadu. V poslednom presune sa z piateho družstva presunula 1/5-tina do prvého. Takže táto 1/5-tina piateho družstva musí byť celé číslo, označme si ho ako **n**. Po poslednom presune ostanú v piatom družstve 4/5-tiny, čo je presne 4-násobok jednej pätiny a teda 4**n**. Navyše po poslednom presune musí byť v každom družstve rovnako hráčov, teda všade ich bude 4**n**.

Po poslednom presune: 4n 4n 4n 4n 4n

Po predposlednom (= 4.) presune: 3n 4n 4n 4n 5n - z piateho družstva sa presúvalo **n** hráčov, takže pred posledným presunom ich v prvom družstve muselo byť o **n** menej

Po 3. presune: 3n 4n 4n 5n 4n - pri 4. presune sa zo štvrtého družstva presunula 1/5-tina hráčov a ostali v ňom 4/5 hráčov. Zároveň vidíme, že po 4. presune ostalo v štvrtej skupine 4**n** hráčov. Takže 1/5-tinu, ktorá sa presúvala, tvorilo presne **n** hráčov. Preto pred 4. presunom (a teda po 3.) bolo v štvrtom družstve o **n** hráčov viac a v piatom o **n** menej.

Po 2. presune: 3n 4n 5n 4n 4n

Po 1. presune: 3n 5n 4n 4n 4n

Pred presúvaním: Vidíme, že tu nastane problém. Z prvého družstva odišla pri prvom presúvaní 1/5-tina a ostali 4/5-tiny. Zároveň vieme, že tie 4/5-tiny, ktoré ostali, sú presne 3**n**. Ak si teda označíme ako **A** počet hráčov v prvom družstve pred presúvaním, tak dostaneme:

$$(4/5) \cdot A = 3n$$
$$A = (15/4)n$$

Vidíme, že **n** musí byť deliteľné štyrmi. Ináč povedané, **n** musí byť štvornásobkom nejakého prirodzeného čísla **k**, čiže n = 4k. Situácia po 1. presune bude teda takáto: 12k 20k 16k 16k 16k,
a situácia pred presúvaním bude: 15k 17k 16k 16k 16k
(stačí si dorátať A = (15/4)n = 15k, takže pri prvom presune sa posunulo 3**k** hráčov).

Na začiatku musia byť teda počty hráčov v družstvách 15k, 17k, 16k, 16k, 16k, kde **k** je prirodzené číslo. Navyše ľahko overíme, že pre tieto počty sa vždy bude presúvať celočíselný počet hráčov a na konci budú všetky družstvá rovnaké:

15k	17k	16k	16k	16k
12k	20k	16k	16k	16k
12k	16k	20k	16k	16k
12k	16k	16k	20k	16k
12k	16k	16k	16k	20k
16k	16k	16k	16k	16k

Našli sme teda všetky riešenia. Najmenšie vyhovujúce riešenie je 15, 17, 16, 16 a 16.