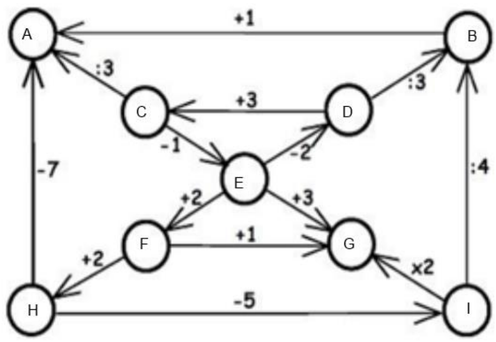
JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2013/14, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,
práve sa k vám dostali zadania druhej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Kapitán Guliver aj jeho kamaráti z ostrova matematikov sa veľmi potešili vaším riešeniam. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami. Skôr, než sa pustíte do počítania úloh, môžete si rozhýbať vaše matematické svaly prečítaním týchto vzorových riešení.

Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

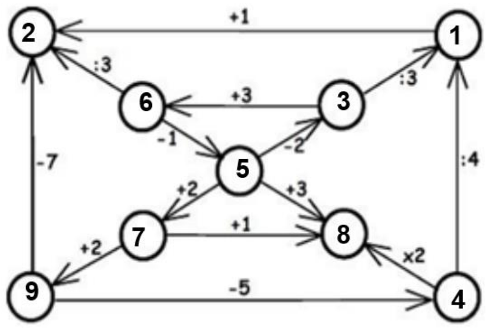
Príklad č. 1 *(opravovala Sisa Nepšinská)*



Na riešenie sa dalo prísť viacerými spôsobmi. Napríklad sa dalo vyskúšať do niektorého konkrétneho krúžku (stredného, ľavého, pravého...) postupne dosadiť všetky čísla od 1 do 9. Alebo sa dalo postupne skúšať dosadiť číslo 8 do všetkých krúžkov. My si ukážeme také riešenie, ktoré nám ušetrí robotu.

Aby sa nám o krúžkoch rozprávalo jednoduchšie, tak si každý označíme jedným písmenkom, tak ako na obrázku vľavo.

Všimnime si, že krúžok A má číslo o sedem menšie než číslo krúžku H. To znamená, že v krúžku H je číslo o sedem väčšie než číslo v krúžku A. Ak by bolo v krúžku A číslo 3, tak v krúžku H musí byť číslo 10. To však nemáme k dispozícii. Z rovnakého dôvodu nemôže byť v krúžku ani číslo väčšie od 3 (v krúžku H by muselo byť číslo, ktoré nie je od 1 do 9). No ak by bolo v krúžku A číslo 1, tak by v krúžku B muselo byť číslo 0 (číslo v krúžku B plus jedna nám má dať jedna), to však nie je číslo od 1 do 9.

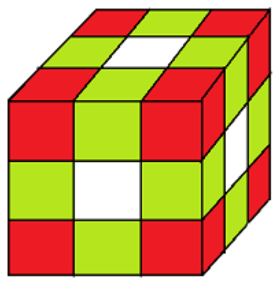


Prišli sme teda na to, že v krúžku A musí byť číslo 1. Teraz pomocou šípok dopočítame, čo vyjde vo zvyšných krúžkoch (obrázok vpravo). Nakoniec ešte overíme, či sedia operácie pri všetkých šípkach a sme hotoví.

Čísla na mape majú byť doplnené tak ako na obrázku vľavo. Nemocnica s číslom 8 je v krúžku, ktorý sme si označili ako G.

Príklad č. 2 *(opravovala Denisa Múthová)*

Našou úlohou je zistiť koľko je vo veľkej kocke takých malých kociek, ktoré sú zlepené stenami s piatimi susednými kockami. Vieme pritom, že vo veľkej kocke je **96** kociek, ktoré stenami susedia so štyrmi kockami. O veľkej kocke ešte vieme, že v nej nie sú žiadne dutiny a diery, celá je vyplnená malými kockami. A každá malá kocka je prilepená ku všetkým susedným kockám, s ktorými má spoločnú stenu.



Najskôr musíme zistiť, kde sa nachádzajú kocky, ktoré stenami susedia so štyrmi kockami. Na pomoc si vezmeme Rubikovu kocku tvaru 3*3*3 (obrázok vľavo). Každá kocka má 6 stien. Rohovým kockám veľkej kocky je vidieť tri steny, teda ďalšie tri steny majú zlepené(na obrázku sú rohové kocky červené). Kocky, ktoré susedia s štyrmi kockami, majú dve steny vonku, na obrázku sú zelené. V kocke 3*3*3 je zelených kociek 4+4+4=12(hore, po bokoch, dolu). Teda kocky susediace so 4 kockami sú tie, ktoré sa nachádzajú na hranách kocky (no nie priamo v rohoch).

Koľko hrán má kocka? Každá takáto kocka má 12 hrán,4 hrany na vrchnej stene, 4 hrany na spodnej stenu a 4 hrany má po bokoch. V kocke 3*3*3 teda vieme zistiť počet zelených kociek na jednej hrane. 12zelených kociek ÷ 12hrán = 1 zelená kocka na hrane.

Ako to bude v Gustávovej kocke, ktorá má mať 96 zelených kociek?
Znovu vieme, že 96 zelených kociek ÷ 12hrán = **8** zelených kociek na hrane. Na jednej hrane je teda 8 kociek, ktoré sa dotýkajú 4 stenami so susednými kockami.

Kocky, ktoré sú zlepené s piatimi susednými kockami sa nachádzajú na stene (v Rubikovej kocke sú bielou farbou). Na našej Rubikovej kocke je na každej stene práve 1 (kocka s 5-susednými je medzi zelenými kockami). Vieme že Gustávova kocka má 8 zelených kociek na každej so štyroch hrán jednej steny kocky. Kociek medzi týmito zelenými je 8 · 8 = **64**. 64 je teda počet malých kociek zlepených s piatimi susednými kockami na jednej stene. A keďže kocka má 6 stien, tak všetkých bielych kociek bude 64 · 6 = **384.**

Kociek zlepených s piatimi susednými kockami 384.

Príklad č. 3 (*opravovali Baška Marečáková a Aďa Santrová*)

Našou úlohou je zistiť, či Jonatán spolu s Adelou a Igorom mohli dokopy nazbierať 49 húb alebo koľko najmenej húb mohli nazbierať.

Poďme zistiť, či mohli nazbierať 49. Zvyšní štyria by museli nazbierať 51 húb. Adela by v tomto prípade mohla nazbierať najviac 15 húb (ak by nazbierala 16 alebo viac húb, tak by Igor musel nazbierať aspoň 17 a Jonatán aspoň 18 húb, spolu by teda nazbierali aspoň 16 + 17 + 18 = 51, no to je priveľa). Veronika, Matúš, Ivan a Zuzka by potom mohli nazbierať najviac postupne 14, 13, 12 a 11 húb. To nám však dá dokopy 14 + 13 + 12 + 11 = 50. Najviac by teda títo štyria mohli nazbierať 50 húb, no dokopy mali nazbierať 51 húb. Jonatán spolu s Adelou a Igorom teda nemohli nazbierať 49 húb.

Teraz ešte zistíme koľko najmenej húb mohli tí traja pozbierať. Už vieme, že 49 je primálo. Nasleduje 50ka a po chvíli skúšania zistíme, že tá už vyhovuje. Stačí ak hubári pozbierajú napríklad takéto počty húb: 18, 17, 15, 14, 13, 12, 11. Dokopy máme 100 nazbieraných húb a prvá trojica pozbierala 18 + 17 + 15 = 50 húb.

Gustáv mal pravdu a Jonatán spolu s Adelou a Igorom mohli spolu nazbierať najmenej 50 húb.

Príklad č. 4 (*opravovala Maťa Kudelčíková a Miro Psota*)

1. *Kód sa skladá len z cifier 1 až 9, teda 0 neobsahuje*
2. *Je to celé 6-ciferné číslo deliteľné 5, ale nie je deliteľné 2*
3. *Všetky cifry sú rôzne*
4. *Štvrtá cifra je o 4 väčšia ako piata cifra*
5. *Druhá cifra je najväčšia*
6. *Prvé trojčíslie sa od druhého líši o 444 (napr. v kóde 213465 sa trojčíslie 213 líši od trojčíslia 465 o 252, lebo 465 je o 252 väčšie ako 213, v kóde 777333 sa 777 líši o 444 od 333)*

Z druhej (a aj prvej) podmienky vieme zistiť, že posledná cifra v kóde je 5. Ďalej bolo výhodné využiť štvrtú podmienku. Keďže číslo 5 je už použité a 9 určite (kvôli 5. podmienke) nemôže byť na štvrtom mieste, zostávajú na doplnenie štvrtej a piatej cifry už len možnosti ***845, ***735 a ***625.

Teraz využijeme podmienku 6. Keby sme ku 845, 735 alebo 625 pripočítali 444, dostaneme viac ako 6-ciferné číslo. Preto prvé trojčíslo musí byť o 444 menšie ako druhé.

Keďže 845-444=401, prvá z možností je 401 835. Tu ale 2.cifra nie je najväčšia, preto to nemôže byť kód. Podobne dostaneme z 735-444=291 kód 291 735, ktorý vyhovuje zadaniu. A keďže tretia možnosť 181 625 tiež nevyhovuje zadaniu**, 291 735 je jediné riešenia.**

***Príklad č. 5 (**opravovala Kaťa Jasenčáková*)

Ako môžeme riešiť túto úlohu? Mohli by sme si skúsiť dosadiť za nejaké písmenká dajaké čísla a pozrieť sa, či budú príklady sedieť. Alebo sa pozrieme na to, či by sa nedali dosadiť niektoré číslice jednoznačne. Výhodné je všímať si najprv písmenká na mieste jednotiek. Ak by sme totiž chceli v nejakom príklade zistiť niečo o číslach na mieste desiatok, nevieme, či na mieste jednotiek v tomto príklade bol prechod cez desiatku (to by nám do stĺpca pridalo ďalší sčítanec). Podobne je to s písmenkami na mieste stoviek. Pred písmenkami na mieste jednotiek však nemohol dôjsť k prechod cez desiatku.

Pozrime sa na príklad v prvom riadku. Na mieste jednotiek máme K - K = C. Vieme, že keď od seba odčítame dve rovnaké čísla, výsledok bude vždy nula. Preto **C=0**. V príklade v treťom stĺpci máme na mieste jednotiek
C – E = A. Vieme, že C = 0 a Adela nám poradila, že E = 6. Z toho už ľahko vypočítame A. A = 10 - 6, teda **A=4**. Museli sme si však ukradnúť jednu jednotku a nesmieme na to zabudnúť pri počítaní tohto príkladu neskôr. Teraz zase poznáme 2 písmená na mieste jednotiek v príklade v treťom riadku: H – A = A. Po dosadení A = 4 dostaneme H – 4 = 4 a zisíme, že **H=8**.

Už nemáme príklad, v ktorom na mieste jednotiek poznáme 2 písmenká . Mohli by sme však skúsiť vypočítať písmenká na mieste desiatok v tých príkladoch, v ktorých sme vyrátali písmenká na mieste jednotiek, lebo už vieme, či tam bol prechod cez desiatku. Ani v nich však nemáme vyrátané 2 písmenká. Vráťme sa teda k príkladom, kde nemáme určené písmenká na mieste jednotiek.

Zaujímavý je príklad v druhom stĺpci. Na mieste jednotiek je K + J = A a na mieste desiatok H + J = A. Z toho nám vychádza, že ak neprejdeme cez desiatku, tak za K aj H musíme dosadiť rovnaké písmenko. To však nemôžeme. V sčítaní K + J = A teda musíme prejsť cez desiatku (uvedomme si, že sčítaním dvoch cifier nevieme prejsť cez viac ako jednu desiatku) . Na mieste desiatok teda dostaneme H + 1 + J = A. Po dosadení toho, čo už poznáme dostaneme K + J = 4 a 8 + 1 + J = 4. Z toho vypočítame, že **J=5** a **K=9**. Keď dosadíme všetky číslice, ktoré už poznáme do tohto príkladu, dostávame: 689 + **G**55 = 844, z čoho ľahko zistíme, že **G=1**.

Skúsme teraz v hlavolame nahradiť všetky písmenká, ktoré sme už vyrátali za číslice. Vyrátali sme ich už dosť veľa, takže možno budeme vedieť určiť zvyšné písmenká jednoduchšie ako skúmaním písmen na mieste jednotiek. V prvom riadku dostávame: 1949 – 689 = 1**F**60, takže **F=2**. V treťom stĺpci máme 1260 – 826 = 4**B**4, teda **B=3**. Už nám ostalo len jedno písmenko D a jediná číslica 7, takže by malo v našom príklade vychádzať **D=7**.
Na záver už len stačí overiť, že po dosadení cifier za písmená, budú všetky rovnice sedieť.

Poznámka: Mnohí z vás určili, že G=1 z toho, že máme príklady, kde sa od štvorciferného čísla odčítava trojciferné a výsledkom je tiež trojciferné. Zabudli ste ale vysvetliť, prečo musí v takomto prípade začínať štvorciferné číslo jednotkou. Tak si to skúste premyslieť a nabudúce nezabudnite vysvetliť.. :)

Príklad č. 6 *(opravoval Hynek Bachratý)*
Xaver: „Yves má dve oči" a „Spolu máme 2 oči": **má 1 oko**
Yves: „Zoro má dve oči" a „Spolu máme 3 oči": **má 2 oči**
Zoro: „Xaver má dve oči" a „Spolu máme 4 oči": **má 1 oko**
(Každý pirát má toľko očí, koľkokrát klame)

Príklad o pirátoch bol dosť ťažký a dalo dosť práce vôbec prísť na správnu odpoveď. Tá je, že X má jedno oko, Y dve a Z jedno oko. Podľa zadania to znamená, že X mal raz klamať a jeho druhá veta je naozaj nepravda, a raz hovoriť pravdu, to je jeho prvá veta o Y. Y má dve oči a teda dve klamstvá, a naozaj, ani jedna jeho veta nezodpovedá výsledku 1-2-1. A Zoro s jedným okom raz klame, a to o Xaverovi, a raz má pravdu o celkovom počte ich očí.

Vysvetliť, že riešenie 1-2-1 zodpovedá vysloveným vetám a zadaniu bolo dôležité. Musíme sa ale tiež presvedčiť, že je to jediné správne riešenie, inak mohla byť odpoveď o počte ich očí aj iná. Táto časť riešenia je tiež dôležitá a úplne správne sa to podarilo len niektorým. Dôležité bolo naozaj preskúmať a vylúčiť všetky možnosti a na žiadnu nezabudnúť. (Ešte pripomenieme, že ani zadanie, ani nebezpečný život piráta nevylučuje možnosť, že prišiel o obe oči, aj keď našťastie v našej úlohe sa to nestalo...)

Jedna z možností bola postupne vyskúšať všetky možné počty, od 0-0-0 až po 2-2-2, a zistiť, ktoré vyhovujú zadaniu úlohy. Napríklad počty 0-0-0 zodpovedajú tomu, že všetci hovoria len pravdu. Ale potom by napríklad podľa prvých a pravdivých viet mali mať po 2 oči, čo sa s predpokladom 0-0-0 vylučuje. Spolu bolo treba preskúmať veľa možnosti (viete koľko?), a ukázalo sa, že platí len jediná, 1-2-1. Bol to trochu zdĺhavý postup, ale určite ste pri ňom na nič nezabudli. Podobne sa dalo vyjsť len z počtu očí jedného z pirátov. Ak by napríklad X nemal žiadne, obe jeho vety sú pravdivé. Y má preto dve oči a spolu majú dve. Na Z teda už žiadne oko nezostalo, a aj on má teda dvakrát pravdu. Potom by ale X mal mať 2 oči, a začali sme s tým, že nemá žiadne, čo nemôže nastať súčasne. Podobne (aj keď zložitejšie) boli aj prípady keď X má 1 a 2 oči.

Často ste postupovali aj podľa celkového počtu očí (čo bolo aj najjednoduchšie riešenie). Ten mohol byť teoreticky od 0 po 6. Treba si ešte uvedomiť, že celkový počet klamstiev zodpovedá celkovému počtu očí a naopak, za pravdivé vety sa ich počet zmenšuje.

Ak by teda mali **spolu 0 očí**, ani raz neklamali, teda všetko čo povedali je pravda. Ale už prvá veta X sa s celkovým počtom očí 0 vylučuje. Ak by mali **spolu 1 oko**, mohli klamať len raz. Ale potom aspoň jedna z ich prvých viet je pravdivá, teda aspoň jeden má dve oči, a teda celkovo ich určite nebude len 1. **Pri celkovo 2 očiach** si mohli dovoliť spolu 2 klamstvá. Ale aspoň dve (ak nie tri) klamstvá sú určite v ich druhých vetách, lebo sa navzájom vylučujú. Potom musia byť pravdivé všetky ich prvé vety, a to by mali spolu očí 6. Podobne **pri 3 očiach** máme dve klamstvá v druhých vetách (ktorých?), a teda jedno klamstvo a dve pravdy v prvých vetách. Teda aspoň dvaja majú po 2 oči a to je spolu aspoň 4.

Z druhej strany, ak majú **spolu 6 očí**, všetky ich vety by mali byť klamstvo. Zároveň ak majú spolu 6 očí, musí mať každý dve, teda ich prvé vety sú pravda. Ale súčasne pravdivé a nepravdivé byť vety nemôžu. Ak majú **spolu 5 očí**, päťkrát klamú. Určite nepravdivé sú tri druhé vety, a teda aj 2 prvé vety. Potom ale môžu mať spolu najviac 2+1+1 očí, a to je na súčet 5 málo.

Zostala posledná možnosť, že **spolu majú 4 oči** a teda 4 krát klamú. Druhá veta X aj Y je klamstvo, majú teda aspoň po jednom oku. Pre Z je druhá veta pravda, Z teda má najviac jedno oko. Y preto klame aj v prvej vete a má teda obe oči. Xaver má tým pádom prvú vetu pravdivú, a teda len jedno oko. Jedno tak zostalo aj pre Z, čo súhlasí s tým, že klame o X.