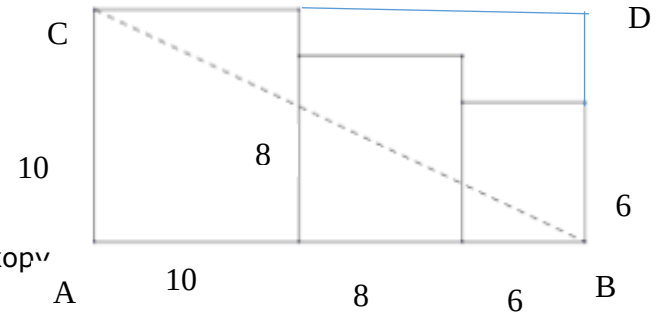
JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2013/14, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
práve sa vám do rúk dostali zadania poslednej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Kapitán Guliver vám až zo vzdialených Logopádov ďakuje za všetky pekné riešenia. Teraz vás čaká tretia séria a možnosť zlepšiť si poradie pre účasť na zimnom sústredení. To sa sa bude konať v dňoch 20. až 23. marca pri Trenčanskom Jastrabí. Predtým než sa pustíte do riešenia si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, dozviete sa kde ste spravili prípadné chyby, a možno sa dozviete aj iné spôsoby ako sa dali úlohy vyriešiť. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

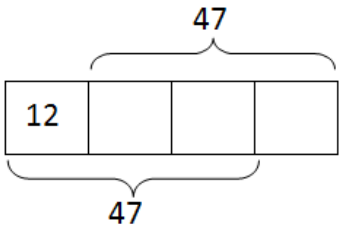
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravoval Feri Dráček)



Obsah sedemuholníka vypočítame ako súčet obsahov troch štvorcov (tie majú rozmery 10m x 10m, 8m x 8m a 6m x 6m) mínus obsah trojuholníka ABC. Súčet obsahov štvorcov je
$S_1 = 10 \cdot 10 + 8 \cdot 8 + 6 \cdot 6 = 200\ m^2$.
Ako zistíme obsah trojuholníka ABC?
Trojuholníky ABC a BCD sú rovnaké, takže majú rovnaký obsah. Navyše nám tieto trojuholníky dajú dokopy obdĺžnik ABCD. Súčet ich obsahov je teda obsah obdĺžnika ABCD.
Keďže majú oba trojuholníky rovnaký obsah, tak obsah každého z nich je presne polovica obsahu obdĺžnika ABCD. Obsah trojuholníka ABC je teda $S_2 = 10 \cdot (10 + 8 + 6) \div 2 = 120m^2$.
Obsah sedemuholníka nám vyjde $S = S_1 - S_2 = 200 - 120 = 80\ m^2$.

Príklad č. 2 (opravoval Didi Hudec)



Pozrime sa na vrchné štyri kajuty (obrázok vľavo). V ľavom hornom rohu máme 12 vriec a zvyšné sú zatiaľ prázdne. Vidíme, že trojica s kajutou v ľavom rohu a trojica s kajutou v pravom rohu majú dve spoločné kajuty. Tieto dve kajuty musia obsahovať spolu 47 - 12 = 35 vriec. To znamená, že v pravom rohu musí byť 47 – 35 = 12 vriec. Rovnakou úvahou prídeme na to, že 12 vriec musí byť aj vo zvyšných dvoch rohoch podpalubia.

Teraz už nám len stačí dopočítavať susediace trojice, v ktorých poznáme počet vriec v 2 kajutách. Takto sa nám podarí doplniť všetky zásoby a loď bude vyvážená iba jediným možným spôsobom (obrázok vpravo).

12	25	10	12
21	17	9	21
14	5	28	14
12	25	10	12

Viacerí z vás však rozmýšľali, ako dostať nejaké iné rozloženie a jeden spôsob naozaj existuje! V zadaní je napísané, že do štyroch už zaplnených kajút, sa už žiadne vrecia nezmestia. To však nutne neznamená, že odtiaľ nemôžeme nejaké vrecia zobrať. Takto napríklad môžeme dať do všetkých rohov po 10 vriec a ostatné čísla dopočítať rovnakým spôsobom ako na začiatku. Pri riešení tejto úlohy však stačilo zdôvodniť riešenie, ktoré ste našli.

Príklad č. 3 (opravovali Ivka Hrivová a Miška Santrová)

Našou úlohou je zistiť koľko núl bude na konci čísla $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99$ a koľko núl je na konci čísla $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 95 \cdot 97 \cdot 99$. Najskôr si uvedomme, že nuly na konci čísla úzko súvisia s deliteľnosťou desiatkou (pod deliteľnosťou desiatkou rozumieme to, že vieme dané číslo vydeliť desiatimi bezo zvyšku).

Pozn.: pod tým, že číslo je deliteľné desiatimi (resp. dvoma, piatimi) budeme v tomto vzoráku myslieť to, že je deliteľné bezo zvyšku

Ak má nejaké číslo na konci nulu, tak ho vieme vydeliť desiatimi (iba škrtneme nulu na konci). Naopak ak nejaké číslo nemá na konci nulu, tak ho desiatimi vydeliť nevieme. Čo ak má nejaké číslo na konci napríklad presne tri nuly? Vieme ho vydeliť desiatimi a dostaneme číslo s dvoma nulami na konci (pri delení sme poslednú nulu vyškrtli). To vieme znova vydeliť desiatimi a dostaneme číslo s jednou nulou. To vieme opäť vydeliť desiatimi a dostaneme číslo, čo už na konci nemá nulu (pôvodné číslo malo na

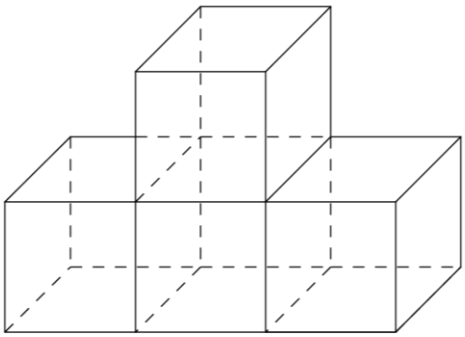
konci presne tri nuly, za nimi teda musela byť iná cifra než nula) a teda nie je deliteľné desiatimi. Zistili sme teda, že číslo končí presne troma nulami vtedy, keď sa dá práve tri krát vydeliť desiatkov.

Platí to aj naopak – ak sa dá číslo práve tri krát vydeliť desiatkov, tak končí práve troma nulami (ak by končilo viacerými nulami, tak sa dá desiatkou vydeliť viackrát, ak by končilo menej nulami, tak sa nedá vydeliť troma desiatkami). Skúšali sme to síce len s troma nulami na konci, no stačí sa trochu zamyslieť a je nám jasné, že to platí aj všeobecne. Číslo sa končí presne toľkými nulami, koľkými desiatkami sa dá vydeliť bezo zvyšku.

Pozrime sa najskôr na číslo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99$. Uvedomme si, že vydeliť toto číslo desiatimi je to isté, ako keď ho vydelíme dvojkou a päťkou. Nakoniec si ešte uvedomme, že ak chceme tento veľký súčet vydeliť päťkou, tak nám vlastne stačí vydeliť piatimi len jedno z čísiel (trochu menší príklad: $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \div 5 = 120 \div 5 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1$).
Koľko pätiek je „schovaných" v súčine $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99$?
Každé z čísiel 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 70, 80, 85, 90 a 95 vieme vydeliť práve jednou päťkou. Týchto čísiel je 16, takže vďaka ním vieme číslo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99$ vydeliť šestnástimi päťkami.
Čísla 25, 50 a 75 sú každé deliteľné dokonca dvoma päťkami. Vďaka ním teda vieme číslo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99$ vydeliť ďalšími šiestimi päťkami.
Žiadne ďalšie číslo deliteľné piatimi už v súčine nie je. To znamená, že toto číslo vieme vydeliť presne 22 päťkami. Číslo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99$ vieme určite vydeliť aj 22 dvojkami (napríklad môžeme predeliť dvoma čísla 2, 4, 6, 8 až 44, každé pravé raz). Číslo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99$ je teda určite deliteľné 22 dvojkami aj 22 päťkami. Tým pádom je deliteľné aj 22 desiatkami (ak vám nie je úplne jasné prečo, tak si to ešte premyslite). Navyše po predelení 22 desiatkami nám už v čísle neostanú žiadne päťky. Tým pádom toto číslo už nebude deliteľné ani desiatkou.
Číslo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99$ je teda deliteľné presne 22 desiatkami, takže končí presne 22 nulami.
Pozrime sa na číslo $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 95 \cdot 97 \cdot 99$. Hneď si všimneme, že nie je deliteľné ani jednou dvojkou a teda ani jednou desiatkou.
Číslo $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 95 \cdot 97 \cdot 99$ teda nemá na konci ani jednu nulu.

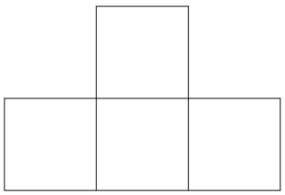
Príklad č. 4 (opravovala Betka Bohiníková)

Väčšina riešení tohto príkladu pozostávala z toho, že ste si vystrihli sieť telesa a skúšali ste ju poskladať až kým sa vám to nepodarilo. Keďže bola zadaná podstava našej budovy, bolo jednoznačné ako má vyzerať (obrázok vpravo). Jednotlivé pohľady potom vyzerajú takto:



zhora

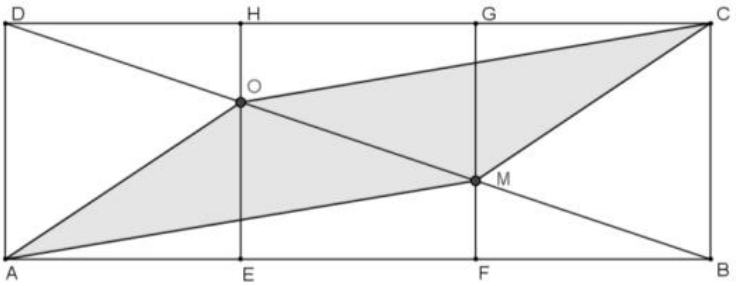
z boku



spredu

(Pohľad z boku a spredu sa môže prehodiť, závisí odkiaľ sa pozeráte.)

Je samozrejme viacero iných možností ako sa dalo postupovať. Napríklad môžeme začať od podstavy. Keďže vieme že v podstave sú tri kocky a tiež, že žiadne štvorce siete sa nám neprekrývajú a ani nie sú vo vnútri nášho telesa, znamená to, že na tie tri kocky by sme potrebovali 14 štvorcov z našej siete (3 na podlahu, 3 + 3 + 2 na boky a 3 na strop).
Ak si spočítame počet štvorčekov v zadanej sieti, zistíme, že je ich 18. A teda nám ešte ostali 4 štvorčeky. Z toho už neposkladáme síce žiadnu celú kocku, ale ak by sme ju len napojili zvrchu na tie naše tri kocky, ušetríme jeden štvorček na podlahu a štvorček, čo bol stropom spodnej kocky bude stropom na novo pridanej kocke (spodná kocka už nebude musieť mať strop, na nej bude položená ďalšia kocka).
Čiže stačí zistiť, na ktorú z tých spodných kociek, je možné pridať štvrtú kocku. Ak sa pozrieme na našu sieť, alebo si to vyskúšame poskladať, všimneme si, že najviac štvorčekov je okolo stredného štvorčeka podlahy. To znamená, že štvrtú kocku položíme na strednú zo spodných kociek. Nakoniec ešte overíme, či vieme túto stavbu vyrobiť z rozloženej konštrukcie.



Príklad č. 5 (*opravoval Adam Kňaze*)

Plocha šedého záhonu sa určite dala zrátať aj pomocou malých trojuholníkov, z ktorých sa skladá. Ale možno jednoduchšie bolo od plochy celej záhrady odpočítať zvyšok, kde nie je cibuľa.

Aj bez vzorca pre plochu trojuholníka je vidieť, že trojuholníky BCM aj DAO majú každý plochu polovice štvorca 10m x 10m. Spolu teda majú 50 + 50 = 100 m^2. Ďalej nás zaujímajú trojuholníky ABM a CDO. Každý má podľa vzorca plochu (30 · (10 ÷ 3)) ÷ 2 m^2, spolu teda majú tiež 100 m^2.

Plocha cibuľovej hriadky je teda 300 – 100 – 100 = 100 m^2.

Príklad č. 6 (*opravoval Janči Jakubík*)

Riešenie tejto úlohy je trošku dlhšie, ale systematickým postupom vieme získať všetky riešenia.

Z akých kartičiek si mohla Adela vybrať? Adela si mohla vybrať kartičky s číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Každú práve raz. Nemohla si vybrať kartičku na ktorej je 0 pretože ak by sa 0 dostala na začiatok čísla, vzniklo by iba trojciferné číslo, no v zadaní je napísané: „Tak vzniklo nové štvorciferné číslo ...“.

Pozrime sa aké najmenšie číslo si mohla Adela vytiahnuť. Premyslite si, že je to postupnosť kartičiek 1234. Súčet potom vyzerá nasledovne:

```
 1234
 4123
 3412
 2341
11110
```

Ako sme si všimli nezáleží na poradí kartičiek ktoré si Adela vytiahla, pretože súčty jednotlivých stĺpcov sú rovné cifernému súčtu kartičiek ktoré si Adela vytiahla. Preto pre kartičky 1, 2, 3, 4, vieme realizovať súčet aj takto:

1 + 2 + 3 + 4 = 10

```
   10
  10
 10
10
11110
```

Teda 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11110

Aké všetky ciferné súčty vieme vytvoriť z možných kartičiek? Najmenší možný súčet už máme, ten je 10. Najväčší možný súčet dostaneme sčítaním najväčších kartičiek: 9 + 8 + 7 + 6 = 30. Sčítaním kartičiek vieme dostať ciferné súčty od 10 po 30.

Podobne ako pri kartičkách 1, 2, 3 a 4 vieme aj teraz zistiť celkový súčet štyroch štvorciferných čísiel:

10	+	100	+	1000	+	10000	=	11110
11	+	110	+	1100	+	11000	=	12221
12	+	120	+	1200	+	12000	=	13332
13	+	130	+	1300	+	13000	=	14443
14	+	140	+	1400	+	14000	=	15554
15	+	150	+	1500	+	15000	=	16665
16	+	160	+	1600	+	16000	=	17776
17	+	170	+	1700	+	17000	=	18887
18	+	180	+	1800	+	18000	=	19998
19	+	190	+	1900	+	19000	=	21109
20	+	200	+	2000	+	20000	=	22220
21	+	210	+	2100	+	21000	=	23331
22	+	220	+	2200	+	22000	=	24442
23	+	230	+	2300	+	23000	=	25553
24	+	240	+	2400	+	24000	=	26664
25	+	250	+	2500	+	25000	=	27775
26	+	260	+	2600	+	26000	=	28886

27	+	270	+	2700	+	27000	=	29997
28	+	280	+	2800	+	28000	=	31108
29	+	290	+	2900	+	29000	=	32219
30	+	300	+	3000	+	30000	=	33330

Medzi konečnými súčtami hľadajme čísla ktoré majú v sebe „... dve rovnaké cifry ...", teda ani viac a ani menej. Vidíme, že je to tak práve pre ciferné súčty 11, 19, 22, 28 a 29.
Poslednou časťou príkladu je nájsť všetky možné kombinácie kartičiek, z ktorých vieme vyskladať ciferný súčet 11, 19, 22, 28, 29.
Spôsobov hľadania všetkých kombinácii je veľa, preto iba uvedieme, že žiadna možnosť sa nemá opakovať (1234 a 3412 je tá istá možnosť, lebo obe čísla obsahujú tie isté cifry, a teda aj kartičky), a vypíšeme všetky možnosti:
Pre ciferný súčet 29 je iba jedná možnosť a to 9875.
Pre ciferný súčet 28 sú to dve možnosti: 9874 a 9865.
Pre ciferný súčet 22 je 11 možností:
9841
9832
9751
9742
9652
9643
8761
8752
8743
8652
7654

Pre ciferný súčet 19 je opäť 11 možností:

9721
9631
9541
9532
8731
8641
8632
8542
7651
7642
7543

Pre ciferný súčet 11 je iba jedná možnosť a to 5321.

Poznámka:
Ak ste uvažovali iba ciferné súčty 29, 28, 19 nebolo to rátané ako chyba, lebo výraz „... dve rovnaké cifry ..." sa dá pochopiť dvojzmyselne.