

JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA
SEZAM, školský rok 2014/15, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,

do rúk sa k vám práve dostali zadania tretej, a teda poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Indiáni Aleka, Mette, Soren a Kuruk sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniami. Zároveň na vás čaká posledná sada úloh, s ktorými potrebujú pomocť. Využite poslednú možnosť zabojovať o čo najlepšie umiestnenie vo finálnom poradí. Tí najúspešnejší z vás sa môžu tešiť na letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 10. až 19. augusta na Fačkovskom sedle. Pred tým než sa pustíte do riešenia úloh, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, určite vám to pomôže.

Nakoniec vás ešte chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

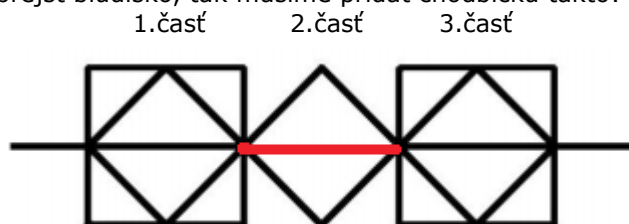
Príklad č. 1 (opravovala Maťka Kudelčíková)

Ako prvé sme mali zistiť, či sa dá prejsť Sorenovým bludiskom tak, aby sa po každej chodbičke prešlo presne jedenkrát a aby sme na jednej strane vošli dnu a na druhej vyšli von. Rozdelíme si naše bludisko na 3 časti a zistíme, či sa dajú najskôr osobitne, a potom ako celé prepojené bludisko prejsť.

Na každú „križovatku“, odkiaľ vedú cestičky, musíme prísť a aj z nej odísť. To znamená, že každá križovatka, okrem vchodu a východu (začiatok a koniec) musí mať párny počet chodbičiek, aby sme sa z nej dostali.

Na našom obrázku však vidíme, že máme nepárny počet chodbičiek v 2. časti obrázku. Aby sme prešli z 1. časti (tú už vieme, že prejdeme, keďže má všade párne počty cestičiek) do 3. časti, musíme pridať cestičku medzi nepárnymi križovatkami. Inak by sme neprešli všetky chodby, prešli by sme po nich viac ako jedenkrát alebo by sme sa nedostali do 3. časti. Tretiu časť prejdeme bez problémov, keďže je rovnaká ako prvá časť (aj ona má párny počet chodbičiek na všetkých križovatkách).

Preto ak chceme prejsť bludisko, tak musíme pridať chodbičku takto:



Príklad č. 2 (opravoval Hynek Bachratý)

V tejto úlohe bolo najdôležitejšie nájsť si čo najlepší systém prehľadávania možných skokov, aby ste mali istotu, že ste vyskúšali všetko a na nič nezabudli. Z vášho riešenia a postupu malo byť jasné, že ste našli všetky riešenia a žiadne ďalšie už neexistujú. Niektorí kreslili skoky na obrázkoch, ale pre prehľadnosť bolo asi najlepšie očíslovať si kamene od prvého po posledný číslami 123456 a Žabiakove spôsoby skákania potom popísať pomocou poradia v akom na kamene skákal.

Keďže začať musel na prvom a skončiť na poslednom, všetky zápisy budú vyzeráť 1****6. Na miestach * budú doplnené čísla kameňov 2,3,4 a 5. Skúsím teraz systematicky vypísať úplne všetky možnosti, ako sa to dá doplniť.

123456	132456	142356	152346 x
123546	132546	142536	152436 x
124356	134256	143256	153246 x
124536	134526 x	143526 x	153426 x
125346	135246	145236	154236 x
125436	135426 x	145326 x	154326 x

Spolu máme 24 možností. Teraz ale musíme využiť, že podľa zadania vie Žabiak skočiť najďalej na ob-ob-susedný kameň. Z kameňa 1 preto nevie skočiť až na kameň 5, a preto celý posledný stĺpec je vylúčený. Naopak, na posledný kameň 6 nevie doskočiť z kameňa 2, ten je už príliš ďaleko. Skontrolujeme a vylúčime tak ešte ďalšie 4 spôsoby skákania. Keď od všetkých 24 možností odčítame 10 vylúčených, ktoré sú označené x, dostaneme 14 možných spôsobov skákania. Keďže sme vypísali všetky možnosti a vylúčili všetky nepovolené, máme istotu, že sme našli všetko. Najšikovnejší riešitelia niektoré vypisovanie nahradili výpočtami, princíp riešenia ale zostal zachovaný.

Príklad č. 3 (opravovala Lenka Trojaková a Miro Hudec)

Aleka chodí s kamarátkami jazdiť na koňoch, pričom vždy platia hrudkami zlata s hmotnosťou 1g, 2g, 3g, 4g a 5g. Každá má každý týždeň svoju sadu hrudiek. Poďme sa pozrieť na to, ako sa s týmito hrudkami dajú zaplatiť jednotlivé sumy za hodinu jazdy.

suma	1. spôsob	2. spôsob	3. spôsob
1g	1g		
2g	2g		
3g	3g	2g + 1g	
4g	4g	3g + 1g	
5g	5g	4g + 1g	3g + 2g
6g	5g + 1g	4g + 2g	3g + 2g + 1g
7g	5g + 2g	4g + 3g	4g + 2g + 1g
8g	5g + 3g	5g + 2g + 1g	4g + 3g + 1g
9g	5g + 4g	5g + 3g + 1g	4g + 3g + 2g
10g	5g + 4g + 1g	5g + 3g + 2g	4g + 3g + 2g + 1g
11g	5g + 4g + 2g	5g + 3g + 2g + 1g	
12g	5g + 4g + 3g	5g + 4g + 2g + 1g	
13g	5g + 4g + 3g + 1g		
14g	5g + 4g + 3g + 2g		
15g	5g + 4g + 3g + 2g + 1g		

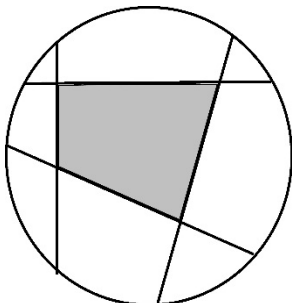
Z tabuľky vidieť, že jednotlivé sumy sa dajú zaplatiť najviac tromi spôsobmi. Aleka môže teda chodiť jazdiť s najviac dvomi kamarátkami. Našou úlohou je zistiť, ako najdlhšie môžu chodiť kamarátky jazdiť. Čím skôr začnú, tým dlhšie budú vedieť zaplatiť za hodinu rôznymi spôsobmi. Tu sa v riešení dostávame k dvom možnostiam.

1. Aleka bude chodiť jazdiť s dvomi kamarátkami. Prvá suma, ktorá sa dá zaplatiť tromi spôsobmi je 5g zlata – to by bol ich prvý týždeň. Posledná je 10 g – posledný týždeň. Vedeli by teda zaplatiť za jazdu každá iným spôsobom najviac 6 krát a suma sa mohla zvýšiť 5 krát.
2. Aleka bude chodiť jazdiť len s jednou kamarátkou. Prvá suma, ktorá sa dá zaplatiť dvomi spôsobmi je 3g zlata – prvý týždeň, posledná 12g zlata – posledný týždeň. Aleka s jednou kamarátkou by vedeli za jazdu zaplatiť každá iným spôsobom najviac 10 krát a suma za jazdu by sa mohla zvýšiť najviac 9 krát.

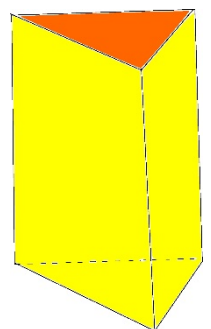
Poznámka: Viacerí ste uvažovali len jednu z možností 1 a 2. Nakoľko aj my opravovatelia sme túto úlohu pochopili každý iným spôsobom, považovali sme za správne aj riešenie obsahujúce len jednu z týchto možností. Samozrejme poctivo odôvodnenú.

Príklad č. 4 (opravoval Kubo Santer)

Kľúčom k vyriešeniu príkladu bolo uvedomiť si, čo musí spĺňať kúsok tekvice, z ktorého po vydľabaní dužiny ostanú dve šupky. No a najjednoduchším takým kúskom je kúsok podobný hranolu, t. j., šupka zospodu, dužina a šupka zvrchu (obrázok napravo). Ako ale taký kúsok vieme dostať?

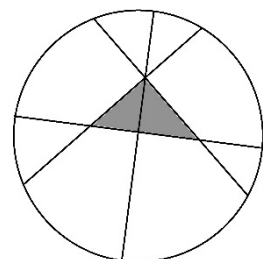
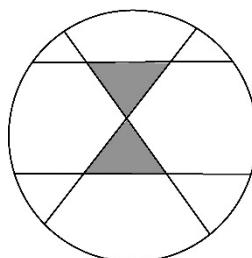
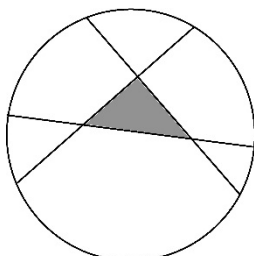


Vieme, že keď sa pozrieme na tekvicu zhora, vyzerá ako kruh. Môžeme sa na krájanie pozrieť ako na krájanie kruhu. Teraz keď chceme dostať kúsok s dvomi šupkami, stačí si uvedomiť, že to budú tie kúsky tekvice, ktoré sa na kruhu nedotýkajú jeho obvodu. Takým kúskom je napríklad kúsok vyznačený šedou farbou na obrázku vpravo.



Uvedomme si, že ak chceme mať šupiek o 1 viac ako kúskov tekvice, musíme mať po krájaní práve jeden kúsok, ktorý sa nedotýka obvodu. Podobne pre počet šupiek o 2 väčší ako počet kúskov tekvice potrebujeme 2 také kúsky. Teraz sa už len treba

vyhrať s počtom rezov tak, aby sme dostali správny počet kúskov tekvice a šupiek. A tak pre 3 rezy, 7 kúskov a 8 šupiek dostávame riešenie znázornené na obrázku dole vľavo. No a nakoniec pre 4 rezy, 10 kúskov a 12 šupiek dostávame niektoré z riešení na obrázkoch dole v strede a dole vpravo.



Príklad č. 5 (opravoval Mojo Majdiš)

Na začiatok si vypočítame niektoré vzdialenosti, ktoré vyplývajú zo zadania. Keďže strana AB má 18 cm, tak jej tretina, strana AE, má 6 cm a zvyšok, strana EB, má 12 cm. Obdobne DH má 6 cm a HC má 12 cm. Strana BF je štvrtina zo strany BC, a teda má $6 \div 4 = 1,5$ cm. Strana FC má potom zvyšných 4,5 cm. Zistili sme, že útvar AEHD štvorec a EBCH obdĺžnik.

Ďalšiu vec, ktorú budeme potrebovať, je vzdialenosť bodu G od strany EB. Kolmica vedená z bodu G na stranu FC rozdeľuje túto stranu rovnakým pomerom ako bod G rozdeľuje stranu FH, a to 1 : 2 (rozmyslite si prečo). A teda G je od EB vzdialený $1,5 + 4,5 \div 3 = 3$ cm. Z toho vyplýva, že aj od strany CH je vzdialený $6 - 3 = 3$ cm.

Aleka má časť v tvare pravouhlého trojuholníka. Jeho obsah je $(6 \cdot 6) \div 2 = 18 \text{ cm}^2$.

Sorenovu časť si rozdelíme na 2 trojuholníky EHD a EGH. Ten prvý z nich má rovnaký obsah ako Alekina časť, a to 18 cm^2 . Kurukovu časť tiež rozdelíme na 2 trojuholníky EBG a BFG. Prvý z nich má obsah $(12 \cdot 3) \div 2 = 18 \text{ cm}^2$. Nakoniec Mettinu časť si tiež rozdelíme na 2 trojuholníky HGC a CGF. Rovnako ako Kurukov trojuholník EBG aj trojuholník HGC má 18 cm^2 .

Z toho jasne vidíme, že Aleka má najmenšiu časť, pretože všetci majú toľko ako ona a navyše ešte jeden trojuholník k tomu. Už nám teda stačí len porovnať obsahy trojuholníkov BFG, FCG a EGH. Trojuholníky BFG a FCG majú rovnakú výšku, no základňa FC je väčšia ako základňa BF, a teda Mette má väčšiu časť ako Kuruk.

Základňa EH trojuholníka HGE je väčšia ako základňa FC trojuholníka FCG (lebo 6 cm je viac ako 4,5 cm). Výšky na tieto základne sú v rovnakom pomere v akom bod G delí stranu FH. A teda výška na EH je opäť väčšia ako výška na FC. Tým pádom má Soren väčšiu časť ako Mette.

Z toho už jednoznačne vieme, že Soren je najvyšší, nasleduje Mette, potom Kuruk a najnižšia je Aleka.

Príklad č. 6 (opravoval Samo Tomašec)

Podme zistiť, na koľko najmenej vážení vieme nájsť so stopercentnou istotou správny výsledok. Najprv si ale ujasníme niektoré pravidlá váženia. Vážiť sa nám oplatí tak, že na jednu stranu dáme toľko isto medailí toho istého druhu ako na stranu druhú. Teda vychádzame z toho, že to, čo sme dali na pravú stranu váhy by sa malo rovnať strane ľavej, pokiaľ sa meranými medailami nenachádza falošná. Ukážme si to na konkrétnom príklade:

Pokiaľ dáme na jednu stranu 2 bronzové medaily a na stranu druhú 1 bronzovú a 1 striebornú, tak nevieme povedať, čo sa stalo, pokiaľ sa vychýlia váhy tak, že 2 bronzové medaily budú dole. Keby sme ale porovnali 2 bronzové s inými 2 bronzovými, tak ak sa váhy vychýlia, tak vieme, že sa medzi nimi nachádza falošná medaila. To ale znamená hneď niekoľko vecí - zlatú medailu nevieme porovnať s inou a preto ak je falošná, tak to dokážeme len tak, že zistíme, že všetky ostatné medaily sú pravé. Druhá vec, ktorá nám vyplýva je, že sa nám oplatí dať na váhu čo najviac medailí - zistíme najviac informácie. Keďže máme nepárny počet medailí toho istého druhu, tak musíme vždy jednu odložiť. Inak by sme nemohli mať toľko isto medailí toho istého druhu na oboch stranách.

Teraz sa pustíme s našimi poznatkami do riešenia. Ide to na jedno váženie? Tak skúsme naukladať čo najviac medailí na váhu s našimi pravidlami. Vidíme, že maximálny počet, sú 2 bronzové a 1 strieborná medaila na každej strane. Pokiaľ by sa rovnali, nevieme povedať, že ktorá je falošná. Rovnako aj pokiaľ by sa nerovnali.

No ale čo tak 2 váženia? Skúsme pokračovať ďalej v našom vážení. Predpokladajme najskôr, že sa **nerovnajú**. Pokiaľ sa nerovnajú, tak vieme, že rameno váhy, ktoré stúplo obsahuje falošnú medailu. To znamená, že falošná medaila je jedna z troch medailí na ľahšej strane. Teraz už ľahko nájdeme falošnú medailu druhým vážením:

Porovnáme 2 bronzové medaily. Pokiaľ nastala nerovnováha, tak medaila, čo je ľahšia je falošná. Pokiaľ nastala rovnováha, tak falošná medaila je strieborná, ktorá bola v ľahšej časti pri prvom vážení.

Teraz sa musíme vrátiť k prvému váženiu, pretože si potrebujeme byť istí, že falošnú medailu ozaj vieme na 2 váženia nájsť. Takže predpokladáme, že po prvom vážení nastala **rovnováha**. Teraz vieme podstatnú informáciu. Všetky tieto medaily sú pravé. Pokiaľ by bola nejaká falošná, nastala by nerovnováha. Tak teda keď vieme, že sú všetky pravé, tak nám ostala už len jedna bronzová, jedna strieborná a jedna zlatá. Potrebujeme teda nejakú dobre odvážiť tieto medaily. Urobme to takto: dajme na jednu stranu neodváženú striebornú a overenú odváženú bronzovú a na stranu druhú neodváženú bronzovú a overenú odváženú striebornú. Pokiaľ sa nám vychýli nejaká strana, je nám jasné, že na tej strane, ktorá je vyššie je falošná medaila. Konkrétne to bude ešte nevážená medaila na ľahšej strane. Pokiaľ by však nastala rovnosť, tak by bola falošná medaila zlatá - všetky ostatné sa ukázali ako pravé.

Takže správnym riešením je, že sa to dalo už na **dve váženia**.

Poznámka: Niektorým z vás sa stalo, že ste použili svoje znalosti z fyziky a povedali ste si, že zlatá medaila musí byť ťažšia, ako strieborná a bronzová. Ale to by sme mohli predpokladať až vtedy, keď by sme vedeli, že majú rovnaký objem. Tiež sa niektorým stávalo, že ste pozabudli na zadanie, v ktorom sme písali, že chceme s istotou

vedieť riešenie. Uspokojili ste sa s tým, keď ste našli spôsob, ako namerať všetky bronzové a na strieborné ste zabudli. Prípadne inak.