JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2014/15, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,
do rúk sa vám práve dostali zadania druhej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Indiáni Metty, Alika, Soren a Kuruk sa veľmi potešili vaším riešeniam. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami. Skôr, než sa pustíte do počítania úloh, môžete si rozhýbať vaše matematické svaly prečítaním týchto vzorových riešení.

Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Ivka Hrivová)

Zo zadania vieme, že pravdu hovoril iba ten, ktorého típí bolo najvyššie. Preberme všetky možnosti:

(1) pravdu hovorila Metty
(2) pravdu hovoril Soren
(3) pravdu hovoril Kuruk

(1) Ak by mala pravdu Metty, tak najvyššie típí je jej. Sorenovo típí teda nemôže byť vyššie ako Mettino (lebo to je najvyššie) a preto klame. Teraz sa pozrime na to, čo povedal Kuruk: „Aspoň jeden z vás nemá pravdu.“ V našom prípade je táto veta naozaj pravdivá, keďže Soren pravdu nemá.

Ak by teda mala pravdu Metty, musel by ju mať aj Kuruk. To je však v rozpore s tým, že pravdu hovoril iba jeden indián (ten s najvyšším típí). Táto možnosť teda nevyhovuje zadaniu.

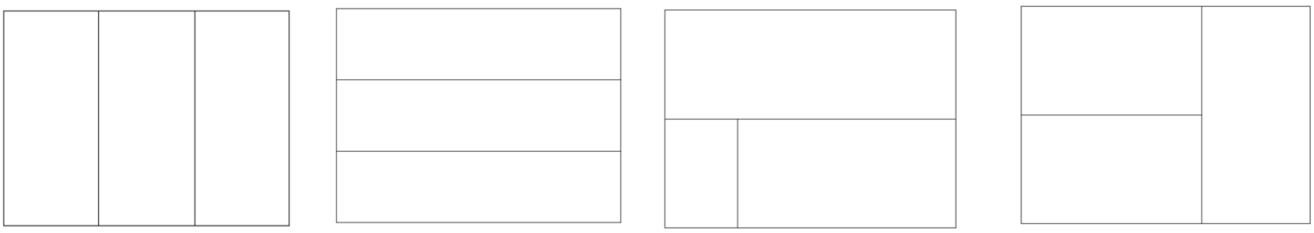
(2) Ak by mal pravdu Soren, tak má aj najvyššie típí. Tým pádom Metty nemôže mať najvyššie típí (má ho Soren), a teda nemá pravdu. Kuruk však má pravdu v tom, že aspoň jeden z nich (Metty) nemá pravdu. Zasa sme v situácii, kedy majú pravdu až dvaja indiáni, čo nevyhovuje zadaniu.

(3) V tomto prípade by hovoril pravdu Kuruk. Zároveň ani Metty, ani Soren nemôžu hovoriť pravdu, lebo pravdu má iba indián s najvyšším típí a to je Kuruk. Obidvaja teda musia klamať. Mettina veta „Moje típí je najvyššie,“ je určite klamstvo (najvyššie típí je Kurukovo). Sorenova veta „Moje típí je vyššie ako tvoje (Mettino),“ je klamstvo iba v prípade, že Sorenovo típí je nižšie ako Mettino. Táto možnosť teda vyhovuje iba v prípade, keď má Soreno najnižšie típí.

Jediná vyhovujúca možnosť je tá posledná. ***Najvyššie típí teda postavil Kuruk a najnižšie Soreno.***

Príklad č. 2 (opravovala Betka Bohiníková)

Najprv si vypočítame obvod celej ohrady. Ten je 2 · (8 + 6) = 28 m. Keďže na rozdelenie môžeme použiť 39 metrov, tak 28 metrov spotrebujeme na vonkajšiu časť ohrady a 11 metrov nám ostane na vnútorné rozdelenie na 3 obdĺžniky. Väčšina z vás objavila tieto 4 spôsoby :



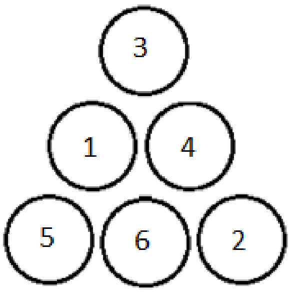
Potom ste si všimli, že na prvé dva spôsoby potrebujeme viac pletiva než máme.
Prvý spôsob: 4 · 6 + 2 · 8 = 40 m, druhý spôsob: 4 · 8 + 2 · 6 = 44 m.
Pri treťom spôsobe rozdelíme ohradu najprv na 2 obdĺžniky pozdĺž dlhšej strany. Použili sme na to 8 metrov pletiva. Zostali nám 3 metre, a tak vieme, že prvý 8 metrový predel musí ísť cez stred. Podobne pri štvrtom spôsobe rozdelíme ohradu pozdĺž kratšej strany. Z 11 metrov nám teda zostalo 5 metrov. A teda vieme, že prvý 6 metrový predel musíme umiestniť tak, aby rozdelil 8 metrovú stranu na 5 metrov a 3 metre.
Nakoniec si ešte niektorí z vás všimli, že tieto rozdelenia ohrád sa dali všelijako pootáčať a vznikli ďalšie spôsoby. Taktiež ste prišli na to, že je vlastne jedno kam sa umiestni v treťom spôsobe 3

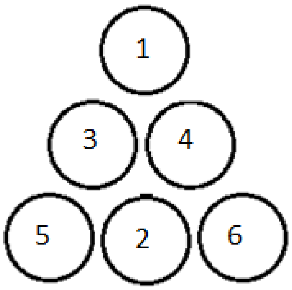
metrový predel, pretože pokiaľ je 8 metrový v strede, tak použijeme vždy rovnako veľa pletiva. A teda možností je nekonečne veľa.

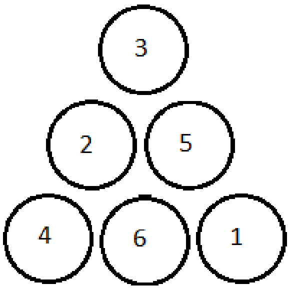
Niektorí z vás ešte písali, že musíme vylúčiť možnosť, keď nám vznikne štvorec. Avšak aj štvorec je v poriadku, pretože je len špeciálnym prípadom obdĺžnika. Tak isto pri štvrtej možnosti vieme posúvať 5 metrový predel, a teda aj tu máme nekonečne veľa možností.

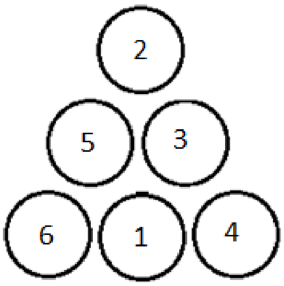
Príklad č. 3 (opravoval Samo Tomašec)

Príklad sa dal riešiť viacerými spôsobmi, my si ukážeme najmenej zložitý.
Do horného okienka môžem umiestňovať čísla od 1 po 6, nie vždy sa mi ale podarí doplniť zvyšok trojuholníka.
Keď hore umiestnim číslo 6, tak vidím, že sa nedá vyskladať ako rozdiel pomocou žiadnych zvyšných čísel. Z rovnakého dôvodu nemôžem umiestniť 6 ani do stredného riadku. Teda **číslo 6 nemôže byť v hornom riadku** (a musí byť v spodnom riadku).
Ak má byť v hornom okienku číslo 5, tak sa dá zapísať jedine ako rozdiel čísel 6 a 1 v strednom riadku. No ako sme si už povedali, číslo 6 musí byť v spodnom riadku. **Číslo 5** teda môže byť iba v strednom alebo spodnom riadku a **nemôže byť na vrchnom mieste**.
Teraz skúsime v hornom okienku číslo 4. To vieme dostať ako rozdiel dvoma spôsobmi. Prvý je ako rozdiel čísel 6 a 2, no 6 musí byť v spodnom riadku, takže tento spôsob nevyhovuje. Druhý spôsob je pomocou čísel 5 a 1. Na to by sme číslo 5 potrebovali v strednom riadku. A na to potrebujeme v spodnom riadku pod ním čísla 6 a 1. Číslo 1 by tak ale muselo byť aj v spodnom aj v prostrednom riadku, čo sa nedá. Na **hornej pozícii teda nemôže byť ani číslo 4**.
Ak hore dáme číslo 3, tak v strednom riadku môžu byť čísla 1 a 4 alebo čísla 2 a 5. Pre obe možnosti ľahko nájdeme vyhovujúcu pyramídu. Ak hore dáme číslo 2, tak v strednom riadku môžeme mať buď dvojicu 1 a 3 alebo dvojicu 3 a 5 (nezabúdajme, že číslo 6 musí byť v spodnom riadku). K dvojici 3 a 5 ľahko dorobíme vyhovujúcu pyramídu. Dvojica 1 a 3 nevyhovuje, lebo pomocou čísel 4, 5 a 6 nevieme vyrobiť rozdiel 3. Z rovnakého dôvodu nevyhovuje možnosť, kde dáme navrch číslo 1 a do stredu čísla 2 a 3. Ak dáme do stredu čísla 3 a 4, tak opäť ľahko nájdeme vyhovujúcu pyramídu. Dvojica čísel 4 a 5 v strede nemôže byť, lebo číslo 5 vieme dostať iba ako rozdiel čísel 6 a 1, no číslo 1 je v hornom okienku. Ku každej zo štyroch možností máme aj zrkadlovo obrátenú možnosť.









Vo vrchnom okienku teda **môžu byť čísla 1, 2 alebo 3 a nemôžu byť čísla 4, 5 a 6**.
Vašou úlohou bolo zistiť aké čísla mohli byť na vrchu pyramídy. Nestačilo iba zistiť, ktoré čísla tam môžu byť, no aj ukázať, prečo tam zvyšné čísla nemôžu byť.

Príklad č. 4 (opravovala Kayči Čárska)

Možno teraz mnohých z Vás prekvapíme, no jednoznačná odpoveď na otázku neexistuje. Nevieme s istotou povedať, ktorých týždňov bolo za tú dobu viac. Či takých, v ktorých bol Soren loviť na 4 rôznych ostrovoch, alebo takých, v ktorých bol loviť na 6 rôznych ostrovoch.

Soren pri rozhodovaní sa hádzal kockou, pri ktorej nikdy nemáme istotu, aké čísla padnú. Čo však môžeme, je odhadnúť, ktorá z možností má vyššiu šancu, že sa stala.
Najlepším nápadom je zobrať si kocku a pár „týždňov" si nahádzať. Ak bude naša kocka čo i len trochu spravodlivá, dostaneme podobné výsledky, ako Soren. Tí z Vás, ktorí kockou hádzali, prišli veľmi rýchlo na to, že „nahádzať" 6 rôznych čísel nie je až také ľahké. Naproti tomu 4 rôzne čísla sa vyskytujú pomerne často.
Poďme teraz túto našu hypotézu odôvodniť. V riešení nestačí len napísať *„podľa mňa to bude takto..."* , alebo *„je veľmi malá šanca hodiť 6 rôznych čísel..."* Dôležité je vysvetliť prečo si myslíte, že je to tak.
Mnohí z Vás prišli na to, že potrebujeme porovnať počet všetkých možnosti, koľkými môžeme kockou postupne na 6 hodov nahádzať 6 rôznych čísel, s počtom možností, koľkými môžeme kockou na 6 hodov nahádzať 4 rôzne čísla. Pri dôkaze nepotrebujeme vedieť presné počty - tieto výpočty prenecháme našim starším kolegom matematikom :-). Postačí nám len **porovnanie** týchto počtov.
Ešte je potrebné si uvedomiť, že všetky rôzne šestice čísel (záleží nám na ich poradí) , majú rovnakú šancu, aby ich Soren nahádzal.
Predstavte si, že hodíte 4x kockou a hodíte 4 rôzne čísla (napr. 1 2 3 4)
– na to, aby ste hodili šesť rôznych čísel máte dve rôzne možnosti 5 6 a 6 5 .
– a to, aby ste hodili 4 rôzne čísla, máte minimálne 4 možnosti : 1 1 , 2 2 , 3 3 , 4 4 (na ďalšie určte prídete sami :-)).
Už z tohto porovnania by mohlo byť zrejmé, že pri spravodlivej kocke (všetky čísla majú približne rovnakú pravdepodobnosť padnutia) je vyššia šanca, že pri šiestich hodoch padnú 4 rôzne čísla, než že padne šesť rôznych čísel.

Príklad č. 5 (opravovala Sisa Nepšinská)

$$A \cdot K = E - P = I \div S = M - E = N \div A$$

Väčšine z vás sa podarilo doplniť čísla správne, či už dosádzaním všetkých možných hodnôt napr. za A, alebo za samotný výsledok príkladov. Skúste porozmýšľať aký najväčší môže výsledok byť? A musí byť vôbec celočíselný? Často sa však stalo, že ste dostatočne neoverili, či existujú aj ďalšie riešenia. Poďme sa teda pozrieť na riešenie príkladu:

V prvej a poslednej rovnosti sa nám opakuje písmeno A, upravme si ich na: $A \cdot A \cdot K = N$. Vieme, že každé písmeno má hodnotu 1 až 9. Keby platilo $A = 4$, znamenalo by to, že $16 \cdot K = N$, takže N je aspoň 16, čo neplatí, takže $A \neq 4$. Podobne vieme ukázať, že A nemôže byť ani väčšie ako 4 (rozmyslite si). A ak by platilo $A = 1$, potom platí $K = N$, čo tiež nemôže byť. Máme preto dve možnosti, 1.) $A = 3$ alebo 2.) $A = 2$.

1. $A = 3$. Tu platí $9 \cdot K = N$, preto N môže mať jedinú možnú hodnotu, 9. Potom $K = 1$ a výsledok všetkých príkladov je $A \cdot K = 3 \cdot 1 = 3$. Pozrime sa na výraz $I \div S$. Tiež musí mať hodnotu 3, máme preňho preto len tieto možnosti: $9 \div 3$, $6 \div 2$ a $3 \div 1$. Lenže čísla 9, 3 a 1 sme už použili, preto nutne $I \div S = 6 \div 2$. Ostali nám nepoužité čísla 4, 5, 7 a 8 a vieme, že platí

$M - E = E - P = 3$. Rozdiel 3 majú zo zostávajúcich čísel len dvojice 8 - 5 a 7 - 4, lenže E musí mať v oboch príkladoch rovnakú hodnotu. To nevieme dosiahnuť, preto táto možnosť nie je správna ($A \neq 3$).

2. $A = 2$. Platí $4 \cdot K = N$. Aby platilo $N \leq 9$, K môže byť najviac 2. Lenže už $A = 2$, preto musí platiť $K = 1$ a teda $N = 4$. Tiež už vieme, že výsledok príkladov je $A \cdot K = 2 \cdot 1 = 2$. Pozrime sa opäť na výraz $I \div S = 2$. Máme preňho tieto možnosti: $8 \div 4$, $6 \div 3$, $4 \div 2$ a $2 \div 1$. Keďže sme už použili čísla 4,2 a 1, musí platiť $I \div S = 6 \div 3$. Zatiaľ sme nepoužili čísla 5, 7, 8 a 9 a vieme, že platí $M - E = E - P = 2$. Vidíme, že s 8 nevytvoríme so žiadnym zvyšným číslom rozdiel 2. Tiež vieme, že $M > E > P$. Máme teda len jednu možnosť: $M = 9$, $E = 7$ a $P = 5$. Hlavolam má preto len jedno riešenie, ktoré vyzerá takto:

$$2 \cdot 1 = 7 - 5 = 6 \div 3 = 9 - 7 = 4 \div 2$$

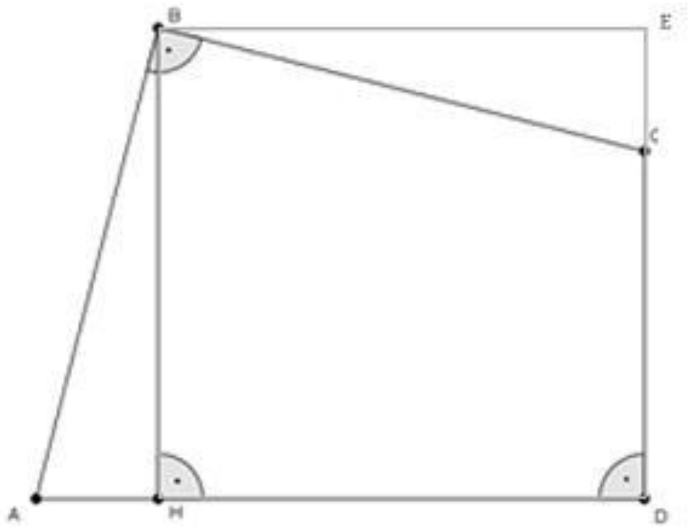
***Príklad č. 6** (opravovala Kaťa Jasenčáková)*

Máme vypočítať obsah všeobecného štvoruholníka ADCB. Vzorec na výpočet obsahu takéhoto štvoruholníka však nemáme. Všetci ste dostali správny nápad, zmeniť tento štvoruholník na iný geometrický útvar, ktorého obsah vieme vypočítať. Doplňme si lichobežník HDCB na obdĺžnik HDEB. Ukážeme si, že tento obdĺžnik je v skutočnosti štvorec s rovnakým obsahom ako má štvoruholník ADCB. Kedy budú mať tieto dva útvary rovnaký obsah? Vtedy, keď budú obsahy trojuholníkov AHB a BEC rovnaké, pretože plocha štvoruholníkov sa líši práve v týchto dvoch trojuholníkoch. Zo zadania vieme, že úsečky AB a BC sú rovnako dlhé. Pozrime sa na veľkosť uhla ABH:

$|\angle ABH| = |\angle ABC| - |\angle HBC| = 90° - |\angle HBC|$

Podobne $|\angle CBE| = |\angle HBE| - |\angle HBC| = 90° - |\angle HBC|$, takže platí $|\angle ABH| = |\angle CBE|$. A keďže sú obidva trojuholníky pravouhlé, tak aj $|\angle BAH| = |\angle BCE|$. Teda trojuholníky AHB a CEB sú zhodné podľa vety sus a preto majú aj rovnaký obsah. Zo zhodnosti takisto vieme, že $|BE| = |BH| = 10$ cm. Takže obdĺždnik HDEB je naozaj štvorec s rovnakým obsahom ako štvoruholník ADEB. Obsah štvorca HDEB je $S_{HDEB} = 10 \cdot 10 = 100$ cm^2.

Štvoruholník ADEB má plochu 100 cm².



Kto bude opravovať úlohy ďalšej série?

Prvú úlohu Baška Marečáková, druhú Sisa Nepšinská, tretiu Iva Jančigová a Hynek Bachratý.
Štvrtú Miška a Aďa Santrové, piatu Jakub Santer a šiestu Feri Dráček.

A prečo Vám to píšeme?

Pokiaľ si týchto vedúcich pamätáte z tábora alebo sústredenia a už ste ich dlho nevideli, môžete im v príslušnej úlohe poslať aj pozdrav alebo iný odkaz. Okrem bodov Vám určite radi niečo milé odpíšu.

Kto to vymyslel?

Za nápad ďakujeme Sáre Galčíkovej, tá určite pošle pozdrav všetkým opravovateľom...