JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

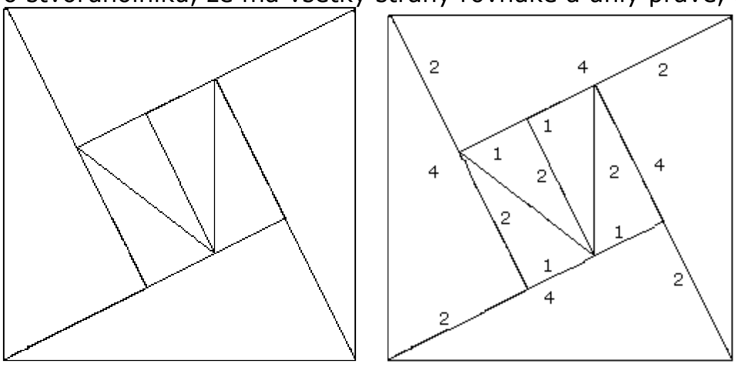
SEZAM, školský rok 2014/15, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
práve sa vám do rúk dostali zadania poslednej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Kuruk, Soren, Aleka a Metty vám z ďalekého západu ďakujú za všetky vaše riešenia. Teraz vás čaká tretia séria a posledná šanca zabojovať o účasť na zimnom sústredení. Predtým než sa pustíte do riešenia si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, dozviete sa kde ste spravili prípadné chyby, a možno sa dozviete aj iné spôsoby ako sa dali úlohy vyriešiť. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Baša Marečáková)

Zo zadania vieme, že Aleka chce poskladať štvorec z ôsmych trojuholníkov kože. Väčšina z Vás po chvíľke skúšania s maketami trojholníkov prišla na uloženie útvarov ako je na obrázku alebo na nejakú modifikáciu. Avšak len nakreslenie obrázka nie je riešením. Potrebujeme ukázať, že náš útvar je naozaj štvorec. Ak povieme o štvoruholníku, že má všetky strany rovnaké a uhly pravé, tak už je jasné, že hovoríme o štvorci.



Najskôr sa pozrieme na strany. Vidíme, že sú všetky dlhými stranami veľkých trojuholníkov, teda určite majú všetky rovnakú dĺžku. Teraz už vieme, že hovoríme o štvorci alebo o kosoštvorci. Treba overiť veľkosť uhlov. Môžeme si všimnúť, že každý z uhlov je tvorený dvoma uhlami z veľkých trojuholníkov. Súčet uhlov v trojuholníku je 180°. Čiže ak odoberieme pravý uhol, dostaneme, že súčet zvyšných dvoch uhlov je 180° - 90° = 90°. Teda všetky uhly v útvare sú pravé. Už máme ukázané, že útvar na obrázku je štvorec. Avšak v zadaní sme mali ešte podmienku, že sa trojuholníky nesmú prekrývať a nesmú tam byť žiadne medzery. Ak doplníme do obrázka aj dĺžky strán, tak súčty na jednotlivých stranách sa rovnajú, teda k sebe útvary priliehajú. ***Takto sme ukázali, že Aleka dokáže poskladať štvorec z trojuholníkových kúskov kože.***

***Príklad č. 2** (opravovala Sisa Nepšinská)*

Označme si zemiak písmenom Z a kukuricu písmenom K. Vieme, že na začiatku boli zemiaky a kukurice rozmiestnené v nádobách tak, že v jednej nádobe bolo ZZ, v druhej KK a v tretej ZK. No potom Kuruk štítky na nádobách premiestnil tak, aby žiadny neukazoval pravdivý obsah nádob. Očíslujme si nádoby číslami 1, 2 a 3 takto:

1. nádoba: štítok ZZ   2. nádoba: štítok KK   3. nádoba: štítok ZK

Všimnime si, že štítok ZK môže byť nalepený buď na nádobe s obsahom ZZ, alebo na nádobe s obsahom KK. Ale vždy je nalepený na takej nádobe, v ktorej sú dva rovnaké kusy zeleniny. Ak preto Soren vytiahne 1 kus zeleniny z tretej nádoby so štítkom ZK, už bude vedieť, čo sa v nej nachádza. Ak vytiahne Z, musí to byť nádoba, ktorá obsahuje ZZ. Ale ak vytiahne K, je to nádoba, ktorá obsahuje KK (premyslite si). Rozoberieme obe možnosti:
a) Soren vytiahol z tretej nádoby Z:

V 3. nádobe je ZZ. Pozrime sa na 2. nádobu. Podľa jej štítku KK vieme, že KK sa v nej nachádať nemôže, a ZZ je už v 3. nádobe. Preto môže v 2. nádobe byť len ZK. V prvej nádobe preto musí byť posledná možnosť KK. Nádoby preto obsahujú toto:
1. nádoba: KK   2. nádoba: ZK   3. nádoba: ZZ

b) Soren vytiahol z tretej nádoby K:

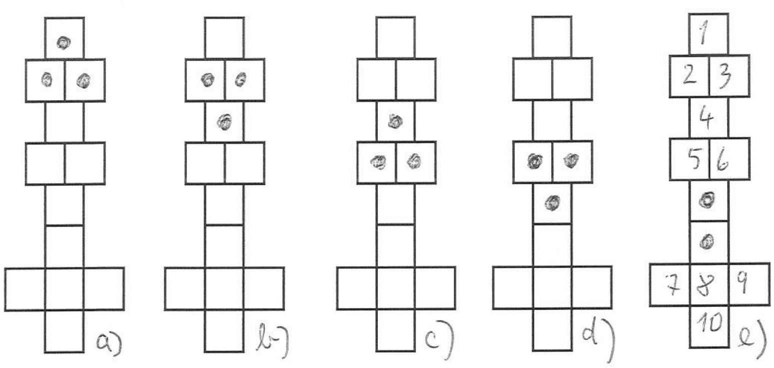
V 3. nádobe je preto KK. Keď sa pozrieme na 1. nádobu, podľa jej štítku ZZ vieme, že ZZ sa v nej nachádzať nemôže. Možnosť KK je už v 3. nádobe, preto v 1. nádobe môže byť len ZK. A v 2. nádobe preto musí byť posledná možnosť ZZ. Nádoby preto obsahujú toto:
1. nádoba: ZK   2. nádoba: ZZ   3. nádoba: KK
V oboch prípadoch Sorenovi stačí vytiahnuť 1 kus zeleniny s nádoby so štítkom ZK na to, aby zistil, v ktorej nádobe sa nachádza aká zelenina.

Poznámka opravovateľa:
*Mnohí z vás si buď neprečítali celé zadanie, alebo ho nesprávne pochopili, čo je škoda. Aspoň polovica z vás vôbec nevyužila, že Soren vidí na nádobách nepravdivé štítky. Riešili ste potom úplne inú úlohu: koľko najmenej kusov musí Soren vytiahnuť, ak o obsahu nádob nevie nič, len pôvodné rozmiestnenie zeleniny? Tu bolo treba rozobrať všetky možnosti Sorenovho ťahania, ktorých bolo veľa a vyšiel iný výsledok ako v pôvodnej úlohe. Za správne vyriešenie tejto pozmenenej úlohy sa nedalo získať viac ako 3 body. Nezabudnite si nabudúce **poriadne prečítať celé zadanie** a ak máte akékoľvek otázky, pýtajte sa na stránke www.sezam.sk, alebo nám napíšte na mail sezam@sezam.sk .*

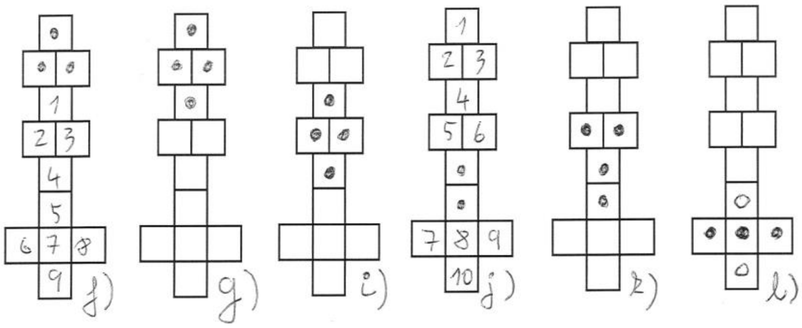
Príklad č. 3 *(opravovala Iva Jančigová a Hynek Bachratý)*

V zadaní sme presne neuviedli, kde začína a kde končí Metty zo skákaním. Uznali sme preto všetky spôsoby, ktorými ste začiatok a koniec skákania určili. Najviac z Vás ale predpokladalo, že Metty začína skákať pred plánikom a končí až za ním. Preto vzorové riešenie napíšeme pre túto situáciu Ostatné riešenia (pre iné spôsoby začiatku a konca) majú podobný postup a výsledky.

Najskôr sa pozrime na 3 žaby. Aby Mety zablokovali, potrebujú obsadiť všetky políčka na dvoch za sebou nasledujúcich riadkoch plániku. Budeme to skúšať od vrchu plániku. Prvé 4 možnosti sú na obrázkoch a) až d). Na obrázku e) nám na zablokovanie plániku stačili dve žaby, a tretia môže byť na ľubovoľnom z 10 zvyšných miest. Na úplnom spodku plániku 3 žaby Metty nezablokujú, lebo všetky tri by museli obsadiť druhý riadok odspodu a žiadna už nezvýši na zablokovanie susedného riadku. **Pre 3 žaby teda máme spolu 14 možností**, ako zablokovať Metty.



Pre 4 žaby využijeme najskôr výsledky pre 3 žaby.



Napríklad rozostavenie a) môžeme rozšíriť doplnením štvrtej žaby na ľubovoľné z 9 zvyšných políčok, ako to vidíme na obrázku f). Takto je možné rozšíriť na deväť možností aj riešenia b), c), d). Ale pozor, na obrázku g) máme rozostavenie, ktoré vznikne doplnením riešenia a) aj doplnením riešenia b). Započítať ho ale treba len raz. Podobne na obrázku i) je spoločné doplnenie riešení c) aj d). Spolu takto teda dostaneme (9+9-1) + (9+9-1) = **34 riešení**.

Na obrázku j) je opäť pozícia, keď Metty zablokovali už 2 žaby. Tretia a štvrtá žaba teda môžu byť na ľubovoľných miestach. Skúsime si pozíciu zvyšných dvoch žiab vypísať pomocou očíslovania políčok. Máme tak možnosti

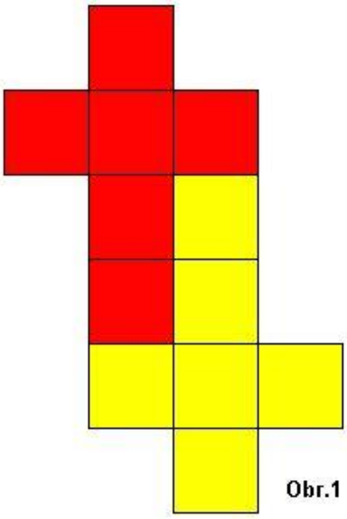
1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	1-8	1-9	1-10
2-3	2-4	2-5	2-6	2-7	2-8	2-9	2-10	
3-4	3-5	3-6	3-7	3-8	3-9	3-10		
4-5	4-6	4-7	4-8	4-9	4-10			
5-6	5-7	5-8	5-9	5-10				
6-7	6-8	6-9	6-10					
7-8	7-9	7-10						
8-9	8-10							
9-10								

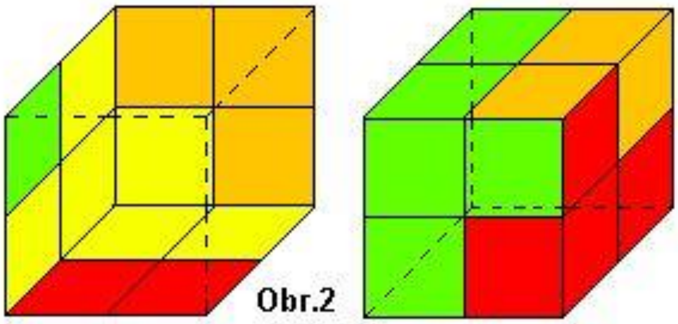
Keď ich spočítame, zistíme, že je ich 45. Niektorí to priamo určili výpočtom (10x9):2 (treba rozumieť, prečo treba deliť dvoma...) Ale pozor, na obrázku k) je rozostavenie, ktoré zároveň vzniklo aj doplnením riešenia d). Spolu nám teda pribudlo len 45-1 = **44 riešení.**

Štyri žaby už ale vedia Metty zablokovať aj na spodku plániku, ako vidieť na obrázku l). Tri žaby obsadia druhý riadok odspodu a štvrtá môže byť nad alebo pod nimi. Pribudli tak posledné **2 riešenia.**

Spolu tak pre 4 žaby máme 34+44+2 = 80 riešení.

Príklad č. 4 (opravovali Aďa a Miška Santrové)
Vezmime si presne ako Soren štyri menšie plášte kocky a skúsme nimi obaliť plášť dvakrát väčšej kocky.
Po chvíľke skúšania niektorí z vás prišli na to, že jednotlivé malé plášte musíme ukladať tak, aby ich dlhšie konce boli vedľa seba (viď obr.1). Takto budú tvoriť už jednu stranu väčšej kocky. Ak by sme plášte uložili inak, vznikne nám oblasť políčok vedľa seba, ktoré už nemáme ako zakryť. Keď teda takto vytvoríme dvojice plášťov, vieme ich uložiť na veľkú kocku. Dvojice dlhších koncov dáme na protiľahlé strany veľkej kocky a to presne ako na obr.2. Takto sme našli spôsob ako obaliť nádobu s korením štyrmi menšími bizónimi plášťami.


Obr.1


Obr.2

Príklad č. 5 (opravoval Kubo Santer)
Poďme sa teda pozrieť na to, čo je to naše slnečné číslo zač. Vieme o ňom, že každá cifra v ňom označuje počet číslic menších ako táto cifra. Teda ak je v čísle použitá cifra 1, musí tam byť aj cifra menšia ako 1, čo musí byť 0. Ak je v čísle použitá cifra 2, tak v ňom musia byť aj dve cifry menšie ako 2. Také sú však presne dve: 1 a 0. A tak ďalej.. ak je v čísle použitá cifra 9, musí v ňom byť použitých aj 9 cifier menších ako 9. Takých je presne 9: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8. Z toho teda vidíme, že ak je v slnečnom čísle nejaká cifra, tak v ňom musia byť aj všetky cifry menšie ako táto cifra!

Ďalším užitočným poznatkom je, že ak vieme aké cifry sa v slnečnom čísle nachádzajú, tak vieme presne povedať o aké slnečné číslo ide. Predstavme si situáciu, že vieme, že slnečné číslo sa skladá z cifier 0, 3, 0, 5, 4, 2, 1 a 2. O aké slnečné číslo potom ide? No vieme, že cifry v ňom sú zľava doprava buď rovnaké, alebo menšie. A teda prvou číslicou musí byť cifra 5, lebo keby bola 5-ka na nejakom inom mieste v čísle, tak by po jej ľavej strane bola nejaká menšia cifra, čo sa stať nemôže. Na druhé miesto teda vyberáme z cifier 0, 3, 0, 4, 2, 1 a 2. Teraz musíme na toto miesto zvoliť cifru 4, keďže je najväčšia. A tak postupne dospejeme k číslu 54322100. To však znamená, že ak vieme aké sú v slnečnom čísle cifry, tak ich len usporiadame tak, že postupne na miesta zľava vyberáme najväčšiu možnú cifru a dospejeme k danému slnečnému číslu.
Pre nás to teda znamená, že potrebujeme vždy len určiť, aké rôzne môžu byť trojice, štvorice a pätice cifier v slnečných číslach.

Poďme sa teraz pozrieť na trojciferné slnečné čísla. Vieme o nich povedať, že v nich nemôže byť cifra väčšia ako 2. Ak by nejaké trojciferné slnečné číslo obsahovalo cifru väčšiu ako 2, tak by muselo obsahovať aj všetky menšie cifry, ktorých je viac ako 2. A teda v súčte by sme dostali viac ako 3 cifry, ktoré by muselo obsahovať. No cifra 2 v takom čísle môže byť, lebo 2, 1 a 0 sú tri cifry. Teda v trojcifernom slnečnom čísle môže byť najväčšia cifra 2.

Ak by sa trojciferné slnečné číslo začínalo cifrou 2, tak v ňom musia byť aj cifry 1 a 0. No a poradie je takisto jasné, keďže vieme, ako majú byť cifry usporiadané. A tam máme len jedno trojciferné číslo začínajúce 2 – 210.

V prípade, že sa trojciferné slnečné číslo začína cifrou 1, tak v ňom musia byť určite dve cifry – 1 a 0. Ostáva nám ešte jedna voľná cifra, ktorá nemôže byť väčšia ako 1. A tak dostávame dve rôzne riešenia: prvé, ak za poslednú voľnú cifru zvolíme 1-ku – 110, druhé pre poslednú cifru 0 – 100.

Teda všetky trojciferné slnečné čísla sú **210, 110 a 100 – 3 možnosti.**

Pozrime sa teraz na štvorciferné slnečné čísla. Podobnou úvahou ako pri trojciferných slnečných číslach prídeme na to, že najväčšia cifra v štvorciferných slnečných číslach môže byť najviac 3. A tak musíme rozobrať tri možnosti prvej cifry slnečného čísla – 1, 2 a 3.

Ak sa štvorciferné slečné číslo začína cifrou 3, tak v ňom musia byť aj cifry 2, 1 a 0 a teda dostávame len jednu možnosť takéhoto čísla – 3210.

Ak sa takéto číslo začína cifrou 2, tak v ňom musia byť aj cifry 1 a 0. Potrebujeme k nim zvoliť ešte poslednú číslicu z cifier 0, 1 a 2. To nám teda dáva tri možnosti takýchto slnečných čísel 2210, 2110 a 2100.

No a nakoniec, ak štvorciferné slnečné číslo začína číslicou 1, tak v ňom musí byť aspoň jedna cifra 0. Na zvyšné voľné miesta musíme ešte zvoliť dve číslice z 0 a 1, s tým, že sa môžu aj opakovať. To vieme tromi spôsobmi: 11, 10 a 00. A tak aj pre štvorciferné čísla začínajúce číslicou 1 dostávame tri možnosti: 1110, 1100 a 1000.

A tak všetky štvorciferné slnečné čísla sú: **3210, 2210, 2110, 2100, 1110, 1100 a 1000 – 7 možností.**

Nakoniec sa pozrime na päťciferné slnečné čísla. Vieme už povedať, že v takýchto číslach môže byť najväčšou číslicou cifra 4 (tak, ako sme to spravili pre trojciferné a štvorciferné slnečné čísla). No túto cifru Solen nepoužíval, a tak znova máme len 3 možnosti prvej číslice päťciferného slnečného čísla – 3, 2 a 1.

Ak sa päťciferné slnečné číslo začína číslicou 3, tak v ňom musia byť aj cifry 2, 1 a 0. Tým pádom nám ostáva ešte zvoliť poslednú cifru, ktorá v takomto slnečnom čísle môže byť. To znamená, že musíme vybrať jednu číslicu z 0, 1, 2 a 3. Takto dostávame 4 možnosti: 33210, 32210, 32110 a 32100.

Ak sa päťciferné slnečné číslo začína číslicou 2, tak v ňom musia byť aj cifry 1 a 0. Potrebujeme teda ešte zistiť, aké dve cifry v takomto slnečnom čísle môžu byť. Potrebujeme teda vybrať dve cifry z 0, 1 a 2, pričom sa môžu aj opakovať. Takéto dvojice sú 22, 21, 20, 11, 10 a 00. To nám dáva ďalších 6 možností päťciferných slnečných čísel: 22210, 22110, 22100, 21110, 21100 a 21000.

No a nakoniec pre päťciferné slnečné čísla začínajúce 1-kou vieme povedať, že sa v ňom určite nachádza aj cifra 0. A tak musíme vybrať rôzne trojice jednotiek a núl. Takéto sú štyri – 111, 110, 100 a 000. To nám dáva posledné štyri päťciferné slnečné čísla: 11110, 11100, 11000 a 1000.

Všetky päťciferné slnečné čísla sú 33210, 32210, 32110, 32100, 22210, 22110, 22100, 21110, 21100, 21000, 11110, 11100, 11000 a 1000 – 14 možností.

Poznámka opravovateľa:
Mnohí z vás prišli na všetky možnosti slnečných čísel (alebo takmer všetky). No vašim riešeniam často chýbal popis toho, ako ste ich našli. A práve tento popis postupu hľadania riešení s odôvodnením, prečo ich hľadáte práve takto je dôležitý. Z takéhoto popisu potom vyplýva, že ste rozobrali všetky rôzne možnosti tvorenia slnečných čísel a teda naozaj už žiadne iné troj, štvor či päťciferné slnečné číslo už neexistuje. Bez tohto zdôvodnenia to naopak vôbec jasné nie je.

Príklad č. 6 (opravoval *Feri Dráček*)

Našou úlohou je nájsť všetky dvojciferné čísla, také že súčet ich ciferného súčtu a ciferného súčinu je rovný samotnému číslu.
Matematicky povedané:
$10 \cdot x + y = x \cdot y + x + y$
po úprave dostaneme
$9 \cdot x = x \cdot y$
a z toho $y = 9$.

Čiže druhá cifra v našom čísle bude 9.
A keďže z rovnice sa nedá vyjadriť x, tak za x možme dosadiť hocijaké číslo od 1 po 9 a náš výraz bude stále pravdivý. (Dokonca by sme môhli dosadiť aj nulu, ale to by sme nedostali dvojciferné číslo)
Teda riešením budú čísla 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

Iné riešenie:
Mnoho z vás úlohu riešilo tak, že ste si vypísali všetky možnosti a našli tie správne.
Teto postup vám sice poskytne správne riešenia, avšak je trošku nepraktický. Len si predstavte, že úloha by bola zadaná pre trojciferné čísla. Nikomu z vás by sa asi nechcelo vyskúšat 899 možností.
Skúšanie a hľadanie správnych možností je veľmi dobré na to, aby ste mohli odhadnúť situáciu. (Napríklad, že riešenia budú končiť na 9).
Avšak, to je stále iba náš odhad a nie dôkaz. Avšak je to veľmi dobrý odrazový mostík.
Nech sa teda naše číslo končí na 9.
Možme si všimnút, že vždy, keď zväčšíme prvú cifru o 1 tak sa mi zväčší cifený súčet o 1 a ciferný súčin o 9, čo je dokopy 10, a to je rovnaká hodnota o akú sa mi zväčší aj samotné číslo.
Z toho vyplýva, že ak bude existovať nejaké číslo zakončené na 9, ktoré vyhovuje zadaniu, budú mu vyhovovať aj všetky väčšie dvojciferné čísla zakončené na 9. Ľahko overíme, že napríklad pre 19 to platí.
Ostáva ešte ukázať, že pre iné čísla to platiť nebude, ale to prenechám už na vás.

Kto bude opravovať úlohy tretej série?
Prvú úlohu Adam Kňaze, druhú Mojo Majdiš, tretiu Erika a Peťo Novotní.
Štvrtú Lenka Trojáková a Miro Hudec, piatu Maťa Kudelčíková a šiestu Michal Hagara.
Píšeme Vám to preto,
že ak si týchto vedúcich pamätáte z tábora alebo sústredenia a už ste ich dlho nevideli, môžete im v príslušnej úlohe poslať aj pozdrav alebo iný odkaz. Okrem bodov Vám určite radi niečo milé odpíšu.
A ďakujeme tým, ktorí tento nápad dostali...