SEZAM, školský rok 2014/15, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMU. Kuruk, Soren, Aleka a Metty sa s vami do jari lúčia. Najšikovnejších z vás čaká zimné sústredenie v Švp Šípková v Terchovej, ktoré sa bude konať v termíne od 19. do 22. marca. Skôr než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravoval Adam Kňaze)

Prvá podmienka zo zadania hovorí, že Aleka a Soren sú obaja starší ako osoba, ktorá dostala náhrdelník od Kuruka. Ani Aleka ani Soren teda náhrdelník od Kuruka dostať nemohli. Kuruk náhrdelník vyrobil, takže si ho tiež nemôže nechať. Kamaráti sú štyria, z nich troch sme už vylúčili, čiže nám zostala už len Metty. Náhrdelník od Kuruka teda dostala Metty.

Ďalej zo zadania vieme, že osoba ktorá dostala náhrdelník od Aleky sedí vedľa Sorena. Z toho vyplýva, že Soren náhrdelník od Aleky nedostal. Ani Aleka nemôže mať náhrdelník, ktorý sama vyrobila. Zostali nám už len dvaja kamaráti, ktorí môžu mať náhrdelník od Aleky – Kuruk a Metty. Metty však už náhrdelník má od Kuruka, a keďže nemôže mať dva, tak náhrdelník od Aleky dostal Kuruk.

Náhrdelník, ktorý vyrobili, ešte neodovzdali Metty a Soren. Keďže Soren musí svoj náhrdelník niekomu dať a Kuruk aj Metty už náhrdelníky majú, Soren dá svoj náhrdelník Aleke. No a nakoniec jediná osoba bez náhrdelníka nám zostal Soren, a jediná osoba ktorá ešte neodovzdala náhrdelník, ktorý vyrobila, je Metty. Preto Metty dá svoj náhrdelník Sorenovi.

Príklad č. 2 (opravoval Mojo Majdiš)

Tak ako väčšina z vás, najskôr si premeňme metre na centimetre. Jedenásť metrov je 1100 centimetrov, trinásť metrov je 1300 centimetrov, pätnásť metrov je 1500 centimetrov a šestnásť metrov je 1600 centimetrov.

Vieme teda, že 9 šípov má aspoň 1100 centimetrov, to znamená že jeden šíp má aspoň 1100 ÷ 9 = 122,22 centimetrov. Keďže šípy musia mať dĺžku v celých centimetrov, tak môžeme povedať, že jeden šíp má aspoň 123 centimetrov. Zároveň 9 šípov má menej ako 1200 centimetrov a teda jeden šíp má menej ako 1200 ÷ 9 = 133,33 centimetrov, čo v celých číslach znamená, že má najviac 133 centimetrov.
Pre jeden šíp nám teda ostali možnosti 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132 a 133 centimetrov.

Avšak vieme taktiež, že 13 šípov má aspoň 1500 centimetrov, a teda jeden šíp má aspoň 1500 ÷ 13 = 115,38 centimetrov, čiže v celých centimetroch aspoň 116 centimetrov. Ale 13 šípov má najviac 1600 ÷ 13 = 123,07. To v celých centimetroch znamená najviac 123 centimetrov.
Teda pre dĺžku jedného šípu máme možnosti: 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122 a 123 centimetrov.
Vidíme, že novšie možnosti majú s predošlými možnosťami len jeden prekryv a to číslo 123 centimetrov. Naša hľadaná dĺžka jedného šípu je teda 123 centimetrov.

Príklad č. 3 (opravoval Peťo Novotný)

Kvôli prehľadnosti zapíšeme jednotlivé tvrdenia dievčat do tabuľky:

	včera	dnes	zajtra
Aleka	streda	piatok	utorok
Metty	štvrtok	sobota	pondelok

Uvedieme teraz niekoľko možností, ako úlohu vyriešiť.

Jedna z možností (najzdĺhavejšia) je preberať postupne všetky dni od pondelka až po nedeľu a kontrolovať koľko pravdivých odpovedí by každé dievča malo, keby bol taký deň.

O niečo šikovnejšie je uvedomiť si, že každé z dievčat práve raz hovorilo pravdu. Stačí teda postupne uvažovať napr. tri tvrdenia Aleky a postupne skúšať, čo vyjde, ak je niektoré z nich pravdivé:

- Ak je pravda, že včera bola streda (teda Aleka mala pravdu o včerajšku), tak dnes je štvrtok a zajtra bude piatok. Potom však všetky tvrdenia Metty sú klamstvom. Takže táto možnosť nevyhovuje.

- Ak je pravda že dnes je piatok (teda Aleka mala pravdu o dnešku), tak včera bol štvrtok a zajtra bude sobota. Metty má teda pravdu o včerajšku a o zvyšných dňoch klame. Zároveň sedí aj informácia, že Aleka dvakrát klamala. Táto možnosť teda vyhovuje.

- Ak je pravda, že zajtra bude utorok (teda Aleka mala pravdu o zajtrajšku), tak včera bola nedeľa a dnes je pondelok. V tomto prípade sú všetky tvrdenia Metty klamstvom, takže ani táto možnosť nevyhovuje.

Zistili sme, že jediná vyhovujúca možnosť je, že Aleka mala pravdu o dnešnom dni. Dnes je teda piatok.

Ukážeme si ešte jedno elegantnejšie riešenie. Každé tvrdenie o včerajšku a zajtrajšku vlastne môžeme nahradiť tvrdením o dnešnom dni, napr. keď Aleka povedala, že zajtra bude utorok, je to to isté, ako keby povedala, že dnes je pondelok. Vyššie uvedenú tabuľku teda môžeme celú prepísať takto:

	dnes (podľa tvrdenia o včerajšku)	dnes	dnes (podľa tvrdenia o zajtrajšku)
Aleka	štvrtok	piatok	pondelok
Metty	piatok	sobota	nedeľa

Jedine ak je piatok, každá jedenkrát hovorí pravdu. Žiadny iný deň sa v tabuľke nenachádza viac ako raz. Takže je piatok.

Príklad č. 4 (opravovali Lenka Trojaková a Miro Hudec)

Cieľom tejto úlohy je prepraviť troch indiánov spolu s ich manželkami na druhý breh rieky tak, aby žiadna manželka neostala s iným indiánom bez svojho manžela dlhší čas, ako je potrebný na nastúpenie a vystúpenie z lode. Pustime sa teda do prevážania!

Označme jednotlivých indiánov I1, I2, I3 a ich manželky M1, M2 a M3, pričom osoby s rovnakým číslom tvoria pár. Môžeme začať viacerými spôsobmi. My uvádzame jeden z nich.
V prvom kroku nasadnú na loď M1 a M2 a prevezú sa na druhý breh. Tam M1 z lode vystúpi a M2 sa vráti naspäť. Na loď sa k nej pridá M3 a preplávajú na druhý breh. Náš doterajší postup určite nevyvolal žiadne žiarlivostné scény, lebo každá z manželiek bola po celú dobu buď v spoločnosti svojho manžela alebo v spoločnosti samých žien.

Teraz máme na jednom brehu troch indiánov a na druhom brehu manželky s loďkou. Aby sme mohli pokračovať, ľubovoľná zo žien nasadne na loď a prepraví sa naspäť k indiánom na prvý breh. Nech je to napríklad M1. Na tomto brehu M1 z lode vysadne a na loď nasadnú I2 a I3. Odplávať musí dvojica mužov, ktorí nie sú manželia ženy, ktorá prišla. Keď I2 a I3 doplávajú na druhý breh, máme opäť viacero možností. Zo štvorice ľudí I2, M2, I3 a M3 môže odplávať buď ľubovoľná žena, dvojica žien, dvojica mužov alebo ľubovoľný pár. Najefektívnejšie je, keď sa vráti len jeden človek – keď už je raz niekto na druhom brehu, načo ho voziť naspäť, ak to nie je nutné? Vyskúšajme teda možnosť, že naspäť pošleme jednu ženu, vyberieme si M2.

Teraz je na prvom brehu I1 a M1, v lodi M2 a na druhom brehu I2, I3 a M3. M2 vystúpi na prvom brehu. I1 a M1 sa odvezú na druhý breh a I1 vystúpi. M1 sa vráti na prvý breh, vyzdvihne ostávajúcu M2 a prevezie ju na druhý breh. Teraz sú všetci spolu šťastne na druhom brehu a všetky tri manželky oboznamujú svojich manželov, že už ich nerozumnú žialivosť nebudú tolerovať ☺

Poznámka 1: V*iacerí ste zabudli na to, že manželka môže ostať na brehu s iným mužom bez svojho manžela, ale len čas nevyhnutný na nastúpenie a vystúpenie.*

Poznámka 2: *Je samozrejmé, že aj indiánky vedia ovládať kanoe.*

Príklad č. 5 (opravovala Maťa Kudelčíková)

O našom kóde od trezoru vieme zatiaľ len to, že je to 4-ciferné číslo, ktoré končí číslicou 9 a je deliteľné každou svojou cifrou. Poďme si teda určiť, ktoré čísla môže obsahovať:

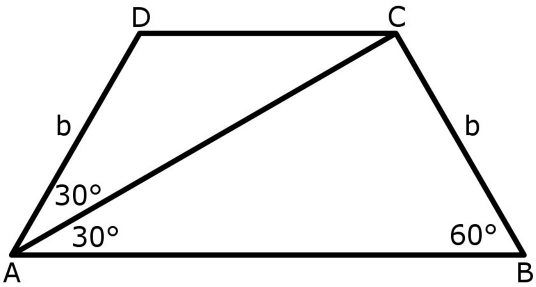
- 0 – nulou sa predsa nedelí – **nemôže**
- 1 – každé číslo je deliteľné 1 – **môže**
- 2, 4, 6, 8 – aby bolo číslo deliteľné párnou cifrou, musí byť tiež párne; tajný kód končí číslicou 9, a teda nie je párny – **nemôže**
- 3 – **môže**
- 5 – číslo deliteľné 5 končí buď 0 alebo 5, no kód končí 9, čiže aj toto môžeme vylúčiť – **nemôže**
- 7- **môže**
- 9- **musí byť**, naše číslo deviatku obsahuje a tak podľa kritérií musí byť ňou aj deliteľné.

Náš kód teda môže obsahovať čísla 1,3,7 a 9.
Aký môže byť ciferný súčet nášho hľadaného čísla? Aby bol deliteľný číslom 9, musí to byť jeho násobok – 9, 18, 27 alebo 36. Väčší byť nemôže, pretože keď si zoberieme naše najväčšie možné číslo- 9999, jeho ciferný súčet je 36. Tu máme hneď aj prvú možnosť, kód 9999.

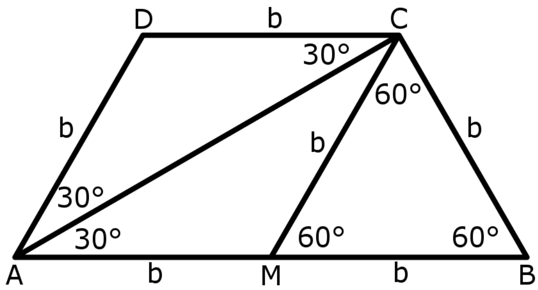
Poďme si rozobrať ďalšie možnosti ciferného súčtu. Ak by bol ciferný súčet 27, prvé tri cifry by museli mať súčet 27 – 9 = 18. Z troch nepárnych čísel však párny súčet nedostaneme, a tak túto možnosť môžeme vylúčiť.

Keby bol ciferný súčet 18, súčet hľadaných cifier by bol 18 – 9 = 9. Ďalšia cifra v našom čísle nemôže byť 9, pretože zvyšné dve cifry by museli byť 0 a tú sme vylúčili hneď na začiatku. Z čísel 1, 3 a 7 musíme urobiť kombináciu trojíc, ktorých súčet je 9. Môžeme si ich všetky vypísať, alebo prebrať možnosti – ak obsahuje 7, zvyšné dve čísla budú mať súčet 9 – 7 = 2, a ten dostaneme len dvomi jednotkami. Z čísel 1179, 1719 a 7119 je len číslo 7119 deliteľné všetkými svojimi ciframi. Ak kód neobsahuje 7, z čísel 1 a 3 dostaneme súčet 9 len ako 3 + 3 + 3. Posledná možnosť je teda kód 3339.
Na otvorenie trezoru môžeme zadať čísla 7119, 3339 alebo 9999.

_Príklad č. 6 (__opravoval Mišo Hagara_)
Aby sme mali predstavu, ako záhrada asi vyzerá, nakreslime si obrázok a zaznačme si doňho všetko, čo poznáme. (Ako predloha nám môže slúžiť obrázok zo zadania.) Poznáme veľkosť uhla BAD, ďalej vieme, že ABCD je lichobežník, čiže strany AB a CD sú rovnobežné. Navyše je tento lichobežník rovnoramenný, a teda uhol ABC musí mať rovnakú veľkosť ako má uhol BAD, čo je 60°. Z rovnoramennosti vieme aj to, že dĺžky strán BC a DA musia byť rovnaké, označme si ich dĺžku písmenkom b. Ešte tam máme uhlopriečku AC, o ktorej vieme, že je osou uhla BAD, takže nám tento uhol rozdeľuje na dva rovnaké uhly veľkosti 30°. Už toho vieme vcelku dosť, tak to poďme zakresliť do obrázka.



Na obrázku si môžeme všimnúť, že uhly BAC a ACD sú striedavé, veľkosť uhla ACD je teda takisto 30°. Potom má ale trojuholník ACD dva rovnaké uhly, čiže musí byť rovnoramenný a dĺžka strany CD bude tiež b.
Dokreslime si teraz rovnobežku s úsečkou AD cez bod C a jej priesečník so stranou AB označme M. Vznikol nám štvoruholník AMCD, ktorý má rovnobežné protiľahlé strany, čo znamená, že je to kosodĺžnik (v skutočnosti je to dokonca kosoštvorec). Musí mať teda protiľahlé strany rovnako dlhé, čiže dĺžka úsečky AM je taktiež b.
Uhol BMC je súhlasný s uhlom BAD, jeho veľkosť je teda 60°. Trojuholník MBC má dva uhly (MBC a BMC) veľkosti 60°, veľkosť tretieho uhla potom bude musieť byť tiež 60°, aby bol súčet uhlov v trojuholníku 180°. To ale znemená, že trojuholník MBC je rovnostranný a všetky jeho strany majú dĺžku b.



Vidíme, že sme lichobežník (záhradu) ABCD rozdelili na tri trojuholníky (ACD, AMC a MBC), ktoré majú rovnakú stranu (CD, AM a MB) a výšku na ňu (táto výška je aj výškou lichobežníka), čiže majú rovnaký aj obsah. Alekin trojuholník je jedným z týchto trojuholníkov.
Aleka sa stará presne o tretinu záhrady, ktorá má 80/3 m².

Poznámka: _Bod M sa dal nájsť rôznymi spôsobmi. Veľa z vás ho našlo nejakým iným spôsobom, no niekedy z toho spôsobu nebolo jasné, či naozaj leží na strane AB._