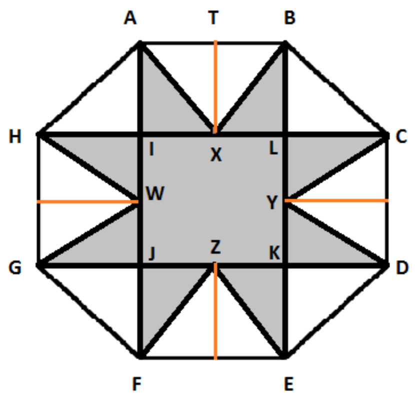
Milí riešitelia,
v rukách práve máte zadania druhej letnej série tohtoročného SEZAMu. Naika, Rudolfus, Ebonika a Horus sa veľmi potešili vašim riešeniam. Na oplátku vás čakajú ďalšie príhody zo starovekého Egypta a s nimi aj nové úlohy. Ak si chcete predtým než sa do nich pustíte precvičiť svoje matematické bunky, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste každé jedno riešenie písali na samostatný papier a pri každom poctivo vypĺňali celú hlavičku. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

***Príklad č. 1** (opravovala Maťka Kudelčíková)*

Príklad ste riešili rôznymi spôsobmi, ukážeme si ten najjednoduchší z nich.



Pozemok v Kráľovskej záhrade má tvar osemuholníka, ktorý si môžeme rozdeliť na trojuholníky a štvorec (jeho strany majú rovnakú dĺžku ako strany osemuholníka). Keďže je to pravidelný osemuholník, úsečky AF a BE budú rovnobežné so stranami GH a CD. To platí aj pri úsečkách CH, DG, AB a EF.
Ako prvé sme si rozdelili obdĺžnik ABLI kolmicou, ktorá vedie zo stredu úsečky IL na protiľahlú stranu. Táto kolmica nám rozdeľuje obdĺžnik na 2 rovnaké menšie obdĺžniky. V obdĺžniku IXTA je úsečka AX jeho uhlopriečkou, preto ho rozdeľuje na 2 rovnaké časti. To znamená, že pomer bielej a sivej časti je 1:1. To isté platí aj vo zvyšných 3 obdĺžnikoch ktoré vyzerajú rovnako – obdĺžnik CDKL, EFJK, a GHIJ.

Ostáva nám druhá časť pozemku, a to trojuholníky AIH, BCL, DEK a FGJ, ktoré sú zhodné, a štvorec IJKL. Zoberme si trojuholník AIH. O tomto trojuholníku vieme, že je rovnoramenný, má pravý uhol pri vrchole I (preto zvyšné dva uhly budú mať 45°) a jeho základňa je jedno z ramien osemuholníka. Poďme ku štvorcu IJKL. Na začiatku sme si povedali, že jeho strany majú rovnakú dĺžku ako strany nášho osemuholníka. Uhlopriečky v ňom nám tento štvorec rozdelia na štyri rovnoramenné trojuholníky so základňou dĺžky strany osemuholníka, s pravým uhlom v strede S (zvyšné dva uhly budú mať po 45°). Vidíme, že tieto trojuholníky sú zhodné s trojuholníkmi AIH, BCL, DEK a FGJ.
Teraz už máme všetky potrebné informácie, preto môžeme spočítať a porovnať bielu a sivú časť a zistíme, že sú rovnaké.
Preto obsah časti pozemku, na ktorom bude Ebonika sadiť banánovníky je 500m².

Príklad č. 2 *(opravovala Kačka Bachratá)*

Táto úloha sa dala pochopiť viacerými spôsobmi, preto dostali plný počet bodov aj rôzne riešenia. Niektorí považovali symetrické hrady za rovnaké, takže im vyšlo 12 rôznych hradov, iní mali 24 možností. Niektorí dbali na bezpečnosť mačičky a jednu z veží dali vo výške 1, iní túto podmienku neuvažovali. Niektorí stavali veže do radu za sebou, iní do kruhu, alebo T-čka. Niektorí náhodne vypisovali, alebo kreslili možnosti, iní si našli pekný systém.
Keď vám nejaký hrad chýbal, išli body dole. Aj vtedy, keď ste nedodržali podmienky, ako môžu byť veže vysoké. Ale musím uznať, že ste toho spolu povymýšľali omnoho viacej, než by dokázali moji študenti na vysokej škole.

Príklad č. 3 *(opravoval Hynek Bachratý)*
Príklad sa dal riešiť viac spôsobmi. Dôležité ale vždy bolo urobiť dostatočne presnú a úplnú analýzu situácie, a aj to poriadne vysvetliť v napísanom riešení.

Najskôr skúsime jednoduchšie, alebo skôr kratšie riešenie.

Na Amorovu otázku v konečnom dôsledku musia odpovedať „áno" alebo „nie", iná možnosť nie je. Preberme preto obe varianty.
Ak Horus a Ebonika odpovedali „áno", Amor by mal byť Anorég, lebo položil otázku na ktorú je odpoveď „áno". Ale otázka znela, či sú Amor aj Omar Nieduíni. Ak je na toto správna odpoveď „áno", zároveň by mal poľa obsahu otázky Amor (aj Omar) byť Nieduín. Amor by tak mal byť členom oboch kmeňov, čo nie je možné. Odpoveď „áno" teda vedie k sporu, nie je možné takto odpovedať.
Druhá možnosť je odpovedať „nie", teda **Amor by mal byť Nieduín**. Ak je to správna odpoveď, nie je podľa obsahu otázky pravda, že sú obaja Nieduíni. K tomu je treba, aby **Omar bol Anorég**. To je ale bez problémov možné (Omar sa nič nepýtal, tak má obe možnosti otvorené).
Máme teda správne riešenie. (Dôležité bolo vyskúšať obe možnosti, ešte sa mohlo stať, že Amor bol z úplne iného kmeňa…)

Druhé riešenie má jednoduchší systém, ale je trochu dlhšie. Treba preskúmať všetky možnosti, z akých kmeňov mohli byť Amor a Omar, a zistiť, ktoré vyhovujú zadaniu úlohy.
Za prvé mohli byť **obaja**, a teda aj Amor, **Anorégovia**. Vtedy na jednej strane odpoveď na Amorovu otázku, vzhľadom na jeho príslušnosť, má byť „áno". Na druhej strane ale v tejto situácii je správna odpoveď na otázku, či sú obaja Nieduíni, „nie". V tejto situácii by teda odpoveď na otázku mala byť „áno" aj „nie", čo sa nedá.
Druhá možnosť je, že sú **obaja Nieduíni**. Z tohto dôvodu by odpoveď mala byť „nie", ale správna odpoveď na otázku „sme obaja Nieduíni" je v tomto prípade „áno". Otázka je tak aj v tejto situácii nezodpovedateľná, takže to musí byť ešte inak.
Ak by bol **Amor Anorég a Omar Nieduín**, podľa kmeňa Amora by mala byť „áno", ale zároveň správna odpoveď na otázku je „nie". Aj v tejto situácii teda otázku Amor nemôže položiť, mala by mať oboje odpovede.
Zostáva posledná možnosť (ak nevyjde, sú to nejakí cudzinci…). **Amor by mohol byť Nieduín a Omar Anorég**. Amorovi ako Nieduínovi treba odpovedať „nie". Ale keďže Omar je Anroég, aj správna odpoveď na otázku „sme obaja Nieduíni" je „nie"! Hurá, v tejto situácii môže Amor otázku položiť a pri odpovedi „nie" je všetko v poriadku.

Príklad č. 4 *(opravovala Baška Marečáková)*

Ebonika, Horus, Naika a Rudolfus hrali každý s každým. To znamená, že každý z nich odohral 3 hry s niekým iným. Počet zápasov vypočítame nasledovne $(4 \cdot 3) \div 2 = 6$. Potrebujeme zistiť, ako dopadli zápasy, čiže počet výhratých (prehratých) a remizovaných zápasov. Pri výhre sa celkovo udelia 3 body. Ak zápas skončí remízou, tak sa udelia $1 + 1 = 2$ body. Môžeme si vypísať možnosti, ako mohlo byť 6 zápasov ukončených ak počet udelených bodov musí byť 14. Druhou možnosťou je úvaha o počte bodov. Ak by všetky zápasy skončili výhrou jedného hráča, potom by sa udelilo $6 \cdot 3 = 18$ bodov. To je o 4 viac ako požadujeme. Rozdiel udelených bodov medzi remízou a výhrou je 1 bod, teda 4 zápasy museli skončiť remízou a 2 výhrou.
Už nám len stačí určiť, kto vyhral nad kým. Zo zadania vieme, že poradie hráčov je nasledovné:
Ebonika > Horus ≥ Naika ≥ Rudolfus
Rozoberme možnosti počtu výhier Eboniky. Ak by Ebonika mala 0 výhier, tak môže maximálne získať 3 body (všetky zápasy remizuje). Potom niekto musí mať výhru aj remízu, teda 4 body. Ebonika by už nebola prvá. Ak by Ebonika mala 1 výhru, tak Horus musí mať druhú. Inak by nebol Horus v správnom poradí voči Naike a Rudolfusovi. Ebonika musela vyhrať nad Horusom, aby mala viac bodov ako on. Ak by Ebonika mala 2 výhry, tak musí vyhrať nad Horusom a nad Rudolfom. Inak by poradie nevyhovovalo zadaniu.

	E	H	N	R	Spolu
Ebonika	x	3:0	1:1	1:1	5
Horus	0:3	x	1:1	3:0	4
Naika	1:1	1:1	x	1:1	3
Rudolfus	1:1	0:3	1:1	x	2

	E	H	N	R	Spolu
Ebonika	x	1:1	3:0	3:0	7
Horus	1:1	x	1:1	1:1	3
Naika	0:3	1:1	x	1:1	2
Rudolfus	0:3	1:1	1:1	x	2

Pozreli sme sa na všetky možnosti skončenia hry a našli sme dve riešenia.

Príklad č. 5 (*opravoval Feri Dráček****)***

Zadanie úlohy bolo jednoznačné:
Máme štvoruholník *ABCD*, rozdelený uhlopriečkami, ktoré sa vo vnútri pretínajú v bode *E*. Uhly v trojuholníku *ABE* sú rovnaké ako v trojuholníkoch *BCE* aj ako v *CDE*, veľkosti a rozvrhnutie jednotlivých uhlov však nepoznáme. Nájdite všetky možnosti a nezabudnite vysvetliť, ako ste na svoje riešenie prišli.

Posledná veta zadania bola miestom, kde veľa z Vás stratilo body, pretože ste sa uspokojili len s jedným konkrétnym tvarom štvoruholníka (napr. štvorec). Ak vieme, že vo štvorci bude uhol uhlopriečok pri vrchole *E* mať 90^0 stupňov, tak z toho ešte nevyplýva, že v iných prípadoch bude rovnaký.
Najprv si treba uvedomiť, že trojuholníky *ABE*, *BCE*, *CDE* majú rovnaké uhly. To ale neznamená, že trojuholníky budú rovnaké, môžu byť len podobné. Taktiež to neznamená, že pri bode *E* budú mať všetky rovnaký uhol. Môžu byť totiž ľubovoľne pootáčané.

Veľkosť uhla *AED* je ale nakoniec pre všetky možné riešenia vždy 90^0.

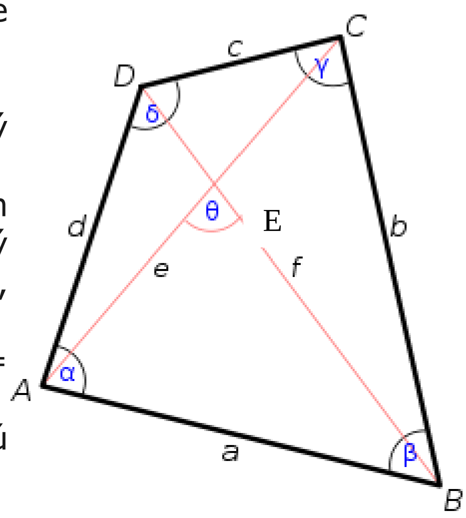
Dokaz bol jednoduchý. Stačí si uvedomiť, že pre trojuholník *ABC* bude platiť *‹AEB = 180⁰- ‹ABE - ‹BAE*

Ale uhol *BEC* je ku nemu susedný, takže preň platí *‹BEC = 180⁰ - ‹AEB*. A zároveň musí byť rovný jednému z uhlov trojuholníka *ABC*.

Ak by bol rovný uhlom *ABE* alebo *BAE,* tak by potom niektorý iný uhol v trojuholníku *BCD* musel byt rovný uhlu *AEB* a tretí uhol by musel mať 0 stupňov. Vidíme, že takýto prístup nebude fungovať.

PRETO nám ostala jediná možnosť, ‹BEC = ‹AEB = 90^0.

Príklady štvoruholníkov, ktoré majú túto vlastnosť, sú štvorec, kosoštvorec a niektoré deltoidy.



Príklad č. 6 (*opravovala Iva Jančigová*)

Zadanie nám hovorí, že máme na záhradnú tabuľku 5×5 umiestniť počty paliem od 1 do 25 tak, aby sa žiadne dva susedné počty (tie, čo sú na políčkach so susednou stranou) nelíšili viac ako o 3.

Niekde na tej tabuľke musí byť napísaná 1 a niekde 25. Predstavme si teraz, že sa chcem dostať nejakou "cestou" od 1 ku 25. Najkratšia možná cesta je 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25. Kratšia už nemôže byť, lebo by sme mali rozdiel medzi susednými políčkami aspoň 4. Zároveň ale platí, že v tabuľke 5x5 sa do každého políčka dostanem najneskôr na 8 krokov (najkratšou cestou). Preto musia byť čísla 1 a 25 v opačných rohoch. Jedno z takýchto umiestnení ja na obrázku.

1	4	7		
		10		
		13	16	
			19	22
				25

Ale teraz nastane problém, pretože okrem tej cesty na obrázku, čísla 1 a 25 spája ešte aj nejaká iná, ktorá má tiež 8 krokov (napríklad cesta znázornená čiarou). Keďže číslo 4 sme už použili, tak susedom čísla 1 na nej môže byť najviac číslo 3. Ale potom už musí byť niektorý krok cesty väčší ako o 3, lebo inak by sme sa nedostali do 25. A to je spor.

Takže také rozmiestnenie paliem, ktoré by spĺňalo zadanie, neexistuje.

Veľa z vás túto úlohu riešilo skúšaním možností. To je v poriadku, ak vyskúšate úplne všetky možnosti, alebo ich rozdelíte do nejakých spoločných skupín a postupne ukážete, prečo žiadna skupina nevedie k riešeniu. Nestačí však iba napísať, že ste veľa skúšali a nič z toho nevyšlo, takže sa to nedá. V tomto príklade je síce pravda, že sa to nedá, ale možno v nejakom inom príklade by ste len jednoducho nenatrafili na to správne riešenie. Preto sa oplatí rozmýšľať aj nad tým, ako zdôvodniť, že sa niečo nedá.