

JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU
SEZAM, školský rok 2016/17, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,

spolu s treťou sériou končí aj celá letná časť SEZAMu. Ian, Jean a Brianna vám z Nového Zélandu všetkým ďakujú za celoročnú pomoc pri riešení ich problémov a prajú pekné a pohodové leto. Tých najšikovnejších z vás navyše čaká letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 12. až 20. augusta vo Fačkovskom sedle. Pred tým, než sa pustíte do vyplňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.

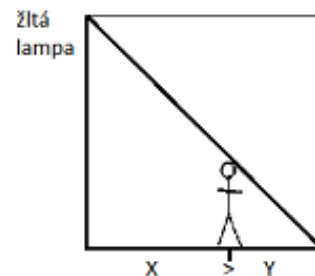
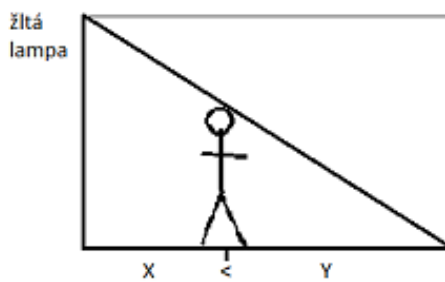
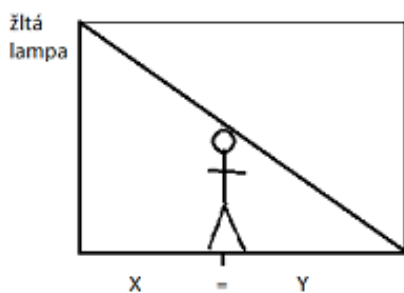
Nezabudnite, že všetko o SEZAME nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov (z Nového Zélandu) želá Martin Bachratý.

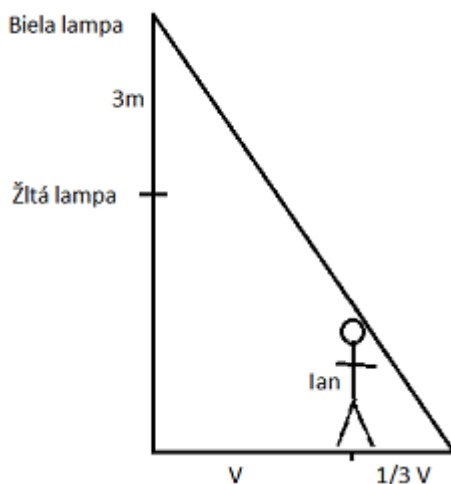
Príklad č. 1 (opravovala Ajka Bachratá)

Svetlo z vrchu lampy svieti na zem, pokým mu v tom Ian nezabráni a nevznikne tieň. Tieň sa vytvorí, keď svetlo prejde tesne ponad najvyšší bod Iana. Potom sa šíri priamo, až pokým nenarazí na zem.

Nakreslime si žltú lampu, Iana a tieň. Skúsime ich nakresliť tak, aby bol Ianov tieň rovnaký ako vzdialenosť od lampy. Po chvíli skúšania sa dá všimnúť, že Ianova výška je polovica výšky žltej lampy. Je to tak, lebo keď urobíme obdĺžnik ktorého jedna strana je lampa a druhá strana je tieň na zemi, tak jeho uhlopriečka predstavuje, ako bude svetlo svietiť na vrchol Ianej hlavy a kde bude dopadať tieň. Keďže Ian stojí v strede, tak jeho výška musí byť po uhlopriečku. Ak by bol vyšší, tak jeho tieň by bol dlhší ako vzdialenosť od lampy. Ak by bol nižší, tak by bol jeho tieň kratší. Takže Ian je po stred uhlopriečky a vďaka tomu je presne do polovice výšky žltej lampy, a teda žltá lampa je dvakrát vyššia ako Ian.



Teraz si nakreslíme bielu lampu. Vieme že teraz je Ianov tieň iba tretina vzdialenosti od lampy.



Na náčrte sú dva trojuholníky, menší tvorený Ianom a jeho tieňom a väčší tvorený lampou. Oba trojuholníky majú rovnaké uhly - jeden pravý uhol, lebo Ian a lampa stoja kolmo na zemi a jeden spoločný uhol tam, kde tieň dopadá na zem. Takže veľký trojuholník je len niekoľkokrát zväčšený malý trojuholník. To koľkokrát má zväčšené strany zistíme zo spodnej strany. Malý trojuholník má stranu $1/3 v$, zatiaľ čo veľký má stranu $v + 1/3 v = 4/3 v$. Takže aby sme z malého trojuholníka dostali veľký, tak musíme jeho strany zväčšiť 4-krát. Z toho vyplýva že biela lampa je 4-krát vyššia ako Ian.

Vieme že žltá lampa je 2-krát vyššia ako Ian a biela 4-krát. Takže rozdiel medzi nimi sú dve výšky Iana a zároveň vieme, že to sú 3 metre. **To znamená, že Ian je vysoký $3 \div 2 = 1,5$ metra.**

Príklad č. 2 (opravovali Mojo Majdiš a Hago Hagara)

Každý mohol podať ruku najviac 4 ďalším ľuďom a najmenej nikomu. To znamená že odpovede, ktoré sme počuli, musia byť práve 0, 1, 2, 3 a 4. A zároveň to znamená, že človek, ktorý sa pýtal, si pri príchode podal ruku toľkokrát, ako niekto iný.

Celkovo bolo podaní rúk 12 (rozmyslite si prečo). Čísla, ktoré sme počuli dávajú dokopy $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. **Zvyšok**, čiže $12 - 10 = 2$, **si musel podať pri príchode ten, kto sa pýtal.**

Príklad č. 3 (opravovala Erika Novotná)

Úloha sa dá úspešne vyriešiť dvoma spôsobmi:

- Prvou možnosťou je vyskúšanie všetkých možných polôh doštičky, zisťovanie konkrétnych súčtov a následne zistenie celkového počtu tých vhodných. Pri tomto riešení sa však môžeme na viacerých miestach pomýliť a je veľmi prácny.
- Druhou možnosťou je objavenie pravidla, ako sa súčty v tabuľke správajú vzhľadom na deliteľnosť číslom 15 a rýchlejšie zistenie počtu vyhovujúcich možností.

Riešenie, ktoré tu uvedieme, patrí do kategórie efektívnejších riešení. Uvedomme si najprv, ako sa menia čísla v tabuľke. Vidíme, že pri pohľade zľava doprava na hociktorý riadok tabuľky čísla postupne rastú o 1, pri pohľade zhora nadol na hociktorý stĺpec tabuľky čísla postupne rastú o 13. Ak označíme číslo pod stredom kríža písmenkom x , čísla, ktoré sú zakryté doštičkou, sa dajú označiť takto:

	$x-13$	
$x-1$	x	$x+1$
	$x+13$	

Súčet čísel, ktoré tabuľka zakryje, je teda $(x - 13) + (x - 1) + x + (x + 1) + (x + 13) = 5x$, čo je číslo vždy deliteľné piatimi (keďže x je prirodzené číslo). Súčet zakrytých čísel $5x$ je deliteľný číslom 15 práve vtedy, keď je číslo x deliteľné 3. V tabuľke je dokopy 56 násobkov čísla 3, z toho presne 16 je na okraji tabuľky (napr. čísla 3, 27, 39, 162, ...). Ani jedno z týchto čísel nemôže byť stredovým políčkom doštičky, lebo by niektoré rameno doštičky trčalo von z tabuľky. Preto je týchto 16 možností nevyhovujúcich. Ostáva už len spomenúť, že ostatné násobky čísla 3 sú vyhovujúce.

Dokopy existuje teda $56 - 16 = 40$ umiestnení doštičky na tabuľku.

Príklad č. 4 (opravoval Kajo Hrubjác)

Ako si veľa z Vás všimlo, keby sme použili všetko ovocie, tak by sa nám podarilo nakrmiť $140 \div 3 = 46,6\dots$ kiwi, teda maximálne 46 spokojných kiwi. Keďže máme 50 mandarínok, aj keby každé kiwi jednu dostalo, aj tak by nám ostali. Preto môžeme dať každému kiwi mandarínku. Potom už potrebujeme iba zistiť aké ovocie im k tomu môžeme dať.

Z ostatného ovocia máme dohromady $40 + 30 + 20 = 90$ kusov, teda vieme z toho vytvoriť najviac $90 \div 2 = 45$ dvojíc ovocia k doplneniu mandarínky. To znamená, že nakrmíme najviac 45 kiwi. Skúsime teda, či vieme takéto dvojice ovocia spraviť, bez toho aby v niektorej dvojici boli dve rovnaké druhy ovocia.

Ak by sme si dali do radu 40 pomarančov a k nim ešte 5 hrušiek, ostalo by nám ešte 30 jablák a 15 hrušiek. Aby sme nemali dva kusy rovnakého ovocia vo dvojici, pridáme zvyšných 15 hrušiek ku pomarančom. Ku zvyšným 25 pomarančom 5 hruškám pridáme jablká. Takto sme vytvorili 45 dvojíc s rôznym ovocím, ku ktorým už len priložíme mandarínku.

Takže 45 kiwi vieme nakrmiť takto:

25 kiwi dostane mandarínku + pomaranč + jablko
15 kiwi dostane mandarínku + pomaranč + hrušku
5 kiwi dostane mandarínku + jablko + hrušku

Ostalo nám ešte 5 mandarínok, ale tie sa už nedajú použiť, lebo nemáme dostatok iného ovocia. Viac ako 45 kiwi sa nakrmiť nedá, takže **spokojných môže byť najviac 45 kiwi a ovocie im vieme rozdeliť hore uvedeným spôsobom.**