

JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2016/17, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,

veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Ian, Jean a Brianna sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniami. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami. Popri počítaní nových úloh si môžete rozširovať vaše matematické svaly pri čítaní týchto vzorových riešení.

Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vyplňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Pozrite sa, či sú Vaše údaje vo výsledkovej listine správne, pokiaľ nie, pošlite nám upozornenie spolu s druhou sériou.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovali Betka Bohiníková a Katka Šostáková)

Ak sa uchádzač o ruku princeznej Brianny naozaj snažil, dostal číslo 2456723456. K tomuto číslu sa dá dostať viacerými spôsobmi, my si ukážeme jeden z nich.

V prvom rade číslo, ktoré má viac cifier, je väčšie od každého, ktoré má menej cifier. Keďže chceme dostať čo najväčšie číslo, naším cieľom je preto vyškrtiť čo najmenej cifier. Ako máme vybrať cifry, ktorých súčet je 44 tak, aby ich bolo čo najmenej? Vyberieme tie najväčšie. Po vyškrtnutí dvoch cifier 9 a dvoch cifier 8 nám zostane číslo s ciferným súčtom 54. Takže ešte potrebujeme škrtnúť niekoľko cifier, ktorých súčet je 10. Jedna cifra nám na to určite stačiť nebude, no dve budú určite stačiť. Teraz už vieme, že výsledné číslo bude mať presne 10 cifier, potrebujeme už len zistiť, ktoré dve cifry okrem osmičiek a deviatok ešte vyškrtíme.

Kráľovo obľúbené číslo začína cifrou 2. Ak sme sa chceli zbaviť tohto čísla (aby výsledné číslo začínalo väčšou cifrou než 2) a zároveň dostať ciferný súčet 44, museli by sme vyškrtnúť ešte jednu cifru 8. Ale obe cifry 8 sme už vyškrtli, preto dvojku necháme na svojom mieste. Stále nám ešte ostávajú viacerí adepti na vyškrtnutie, a to kombinácie 3-7, 4-6 a 5-5. Ak vyškrtíme cifru 3 na druhej pozícii, dostane sa na jej miesto cifra 4. Potom máme ešte 2 možnosti, kde vyškrtnúť cifru 7. Ak by sme ju vyškrtli na prvej pozícii, číslo by sa zmenšilo o 10 miliónov. Preto je lepšie vyškrtnúť cifru 7 na mieste jednotiek a získame číslo 2456723456.

Ostávajú nám ešte dve kombinácie. Po vyškrtnutí dvojice 4-6 síce dostaneme 10-ciferné číslo, no toto číslo bude určite začínať dvojicou 23... a bude menšie ako číslo 2456723456. To isté platí aj pre kombináciu 5-5, opäť by sme dostali menšie číslo.

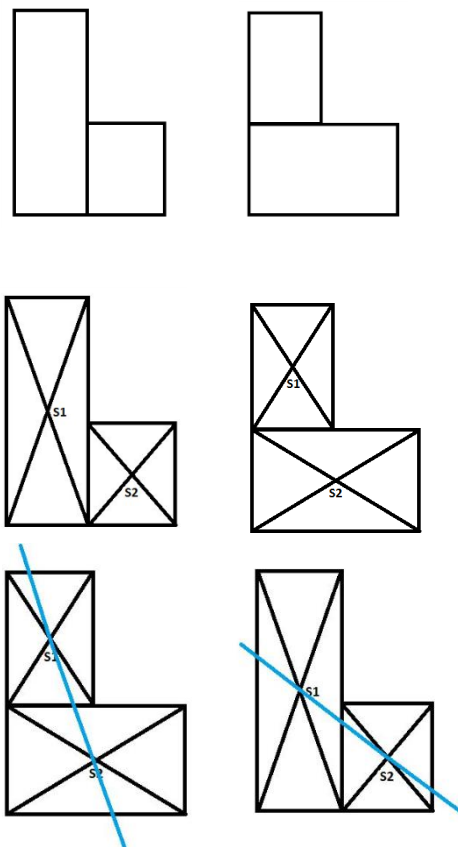
Uchádzač o ruku princeznej si vybral číslo 2456723456, ktoré dostal vyškrtnutím cifier 9, 9, 8, 8, 7 a 3.

Príklad č. 2 (opravovala Ad'a Santrová)

Brianna a Ian dostali za úlohu rozdeliť L-ko na dve rovnaké časti. Pritom môžu používať iba ceruzku a dlhé rovné pravítko bez mierky. Akým spôsobom to majú urobiť? Útvar, ktorý majú rozdeliť na dve polovice si môžeme predstaviť ako dva zlepené obdĺžniky, a to dvoma spôsobmi. Pravítkom a ceruzkou si vieme aj dokresliť rozdeľovaciu čiaru.

Ak budeme viesť jednou priamkou rozdeliť každý z týchto obdĺžnikov na dve polovice, úlohu splníme. Vieme, že obdĺžnik je stredovo súmerný cez svoj stred. Tento stred nájdeme ako priesečník jeho uhlopriečok, ktoré si aj vieme narysovať.

Keďže každý obdĺžnik je stredovo súmerný cez svoj stred, tak každá priamka, ktorá prechádza týmto stredom, ho rozdelí na dve rovnako veľké časti. Takže priamka, ktorá prechádza bodmi S1 a S2, rozdelí obidva obdĺžniky na dve rovnako veľké časti. Teda táto priamka rozdelí celý útvar L na dve rovnako veľké časti, a vieme ju narysovať tým, čo máme k dispozícii.



Príklad č. 3 (opravoval Adam Kňaze)

Túto úlohu väčšina z vás riešila skúšaním. Najprv ste si vypočítali ciferné súčty najmenších troch súčinnov $999 \cdot 198$, $9999 \cdot 198$ a $99999 \cdot 198$. Všetci ste si ihneď všimli, že keď sa k prvému číslu v súčine pridá jedna cifra (deviatka), pridá sa jedna deviatka aj do výsledku a tým sa zvýši ciferný súčet o deväť. Tu bohužiaľ väčšina z vás zastala, vyrátala si ciferný súčet súčinu zo zadania a to bolo všetko. To však nestačí. Vždy, keď si pri riešení všimnete nejakú zaujímavú skutočnosť, je to len prvý krok. Následne musíte ukázať, prečo to, čo ste si všimli, naozaj platí a či to bude platiť vždy.

Veľmi názorný spôsob ako ukázať, že to bude naozaj platiť vždy, je zapísať si zadanie ako násobenie pod seba. Pre $99999 \cdot 198$ to vyzerá takto:

$$\begin{array}{r} 198 \\ \cdot 99999 \\ \hline 1782 \\ 1782 \\ 1782 \\ 1782 \\ 1782 \\ \hline 19799802 \end{array}$$

Vidíme, že za každú deviatku v čísle 99999 sa pridá jeden riadok 1782, pretože $9 \cdot 198 = 1782$. Keď pridáme ďalšiu deviatku, bude to vyzeráť takto:

$$\begin{array}{r} 198 \\ \cdot 999999 \\ \hline 1782 \\ 1782 \\ 1782 \\ 1782 \\ 1782 \\ \hline 197999802 \end{array}$$

Obe modré časti na začiatku aj na konci budú rovnaké, pribudne nám iba jeden červený stĺpec, ktorého súčet je 18. To znamená, že by som zapísal osmičku, cez desiatku sa však prenáša jednotka čo dáva dokopy 9.

Druhý spôsob, akým niektorí z vás riešili tento príklad, začínal úvahou. Totiž keď k akémukoľvek číslu ktoré je iba zo samých deviatok pripočítame jednotku, dostaneme číslo ktoré má prvú cifru 1, a potom toľko núl koľko bolo v pôvodnom čísle deviatok. Náš súčin si teda vieme zapísať ako $999\dots999 \cdot 198 = (1000\dots000 - 1) \cdot 198 = 198000\dots000 - 198$. Tento príklad už vieme jednoducho vyriešiť, napríklad znovu odčítaním pod seba, to však už nechám na vás :)

Ciferný súčet čísla, ktoré dostaneme ako výsledok súčinu $999\dots999 \cdot 198$, je teda 9000.

Príklad č. 4 (opravovali Ivka Hrivová a Kika Kovalčíková)

V zadaní máme dve informácie, ktorých sa vieme chytiť. Brianna sa domorodca spýtala dve otázky, na ktoré nám istým spôsobom odpovedal a z týchto odpovedí budeme čerpať.

Prvá otázka bola, či vie akej farby má vlasy. Odpovedal, že hnedé. Čo z toho vieme zistiť? Domorodec môže byť buď hnedovlasý severan, hnedovlasý južan, červenovlasý severan alebo červenovlasý južan.

Klamári sú hnedovlasí severania a červenovlasí južania. Pravdovravní sú hnedovlasí južania a červenovlasí severania.

V prípade, že by mal náš domorodec červené vlasy, musel by klamať. Teda jediný kmeň, ktorý klame a má červené vlasy sú červenovlasí južania. Ak by mal hnedé vlasy, musel by samozrejme hovoriť pravdu. Pravdovravným kmeňom z hnedými vlasmi sú hnedovlasí južania. Z tejto odpovede nám je teda jasné, že náš domorodec je južan. Lenže ktorý? Farbu jeho vlasov nám pomôže zistiť druhá otázka.

Brianna sa domorodca spýtala, z akej časti ostrova je. Povedal, že nám na to neodpovie a odišiel. Čo teda urobil? Prehlásil, že nám odpoveď na otázku nedá a skutočne aj nedal. Takže to, čo povedal bola pravda a je teda poctivec. Keďže je pravda, že nám nedal odpoveď na otázku, je tiež pravda, že má hnedé vlasy a je teda hnedovlasý južan.

Z rozhovoru sme o domorodcovi zistili, že je hnedovlasý južan.