# SEZAM, školský rok 2017/18, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa končí letná časť tohtoročného SEZAMU a vlastne aj celý školský rok, počas ktorého sme sa so Sárou, Arthurom a ich mnohými kamarátmi túlali bližším aj vzdialenejším vesmírom. Úplný záver nás ale čaká na 10-dňovom letnom sústredení v penzióne Jazmín na Duchonke od 18. do 27. augusta 2018. Pozvánku a návratku si nájdete v tejto obálke, tak neváhajte a prihláste sa.
Ešte pred tým si ale pozrite vzorové riešenia, nech je definitívne jasné, ako celý príbeh dopadol... A nezabudnite, že všetko o SEZAMe (už opäť) nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

***Príklad č. 1*** *(opravovala Denisa Múthová)*

Zo zadania vieme, že okrem dvoch štvorcov má každý štvorec práve dvoch kamarátov, z ktorých má jeden obvod o 8 cm menší a druhý o 8 cm väčší. To znamená, že každý štvorec okrem dvoch má iných dvoch susedov, z ktorých jeden má dĺžku strany o 2 cm menšiu a druhý o 2 cm väčšiu (obvod štvorca *o= 4xb*, kde *b* je dĺžka strany). Tiež žiadne dva štvorce na lúke nie sú zhodné, a obvod najmenšieho štvorca je rovný dĺžke strany najväčšieho štvorca. Priemerný obsah všetkých štvorcov je 116 cm2.
Našou úlohou je zistiť koľko štvorcov žije na ostrove a aké sú rozmery najmenšieho a najväčšieho z nich.
Dĺžka strany najmenšieho štvorca vie byť najmenej 1 cm. Potom obvod tohto štvorca je 4x1 a teda strana najväčšieho štvorca bude 4 cm. To ale nesedí zo zadaním, pretože dĺžky strán nasledujúcich štvorcov sú vždy väčšie o 2. Teda ak by sme začali so stranou 1, nasledujúce by boli 3, 5, 7,... a nikdy nie 4. Táto istá úvaha platí aj pre všetky iné najmenšie štvorce, ktoré by mali nepárnu dĺžku strany.
Najmenší štvorec preto musí mať párnu dĺžku strany. Ak má dĺžku strany 2 cm (najmenšie celé párne číslo), jeho obvod je potom 8 cm (2x4) a najväčší štvorec má stranu 8 cm a obsah 64 cm$^2$. Toto ale nespĺňa podmienku, že priemerný obsah štvorcov je 116 cm$^2$ (priemer 116 cm$^2$ je viac než obsah najväčšieho z nich...).
Ak má najmenší štvorec dĺžku strany 4 cm, jeho obvod je 16 cm (4x4) a najväčší štvorec má stranu 16 cm a obsah 256 cm$^2$. To zatiaľ vychádza.
Nasledujúca tabuľka ukazuje všetky štvorce od najmenšieho so stranou 4 cm až po najväčší so stranou 16cm, dokopy 7 štvorcov.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Strana | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| Obvod | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 |
| obsah | 16 | 36 | 64 | 100 | 121 | 196 | 256 |

Priemerný obsah je: (16+36+64+100+121+196+256)/7= 812/7=116 cm$^2$ to tiež sedí a teda sme našli riešenie.
Pri predpoklade splnenia celého zadania, iné štvorce už na lúke nebudú (napr. ak by neplatilo, že každý štvorec má dvoch susedov ale menej a pod.). Toto riešenie je jediné, pretože ak by najmenší štvorec mal dĺžku strany viac ako 4 cm, napr. 6cm, potom najväčší štvorec má stranu 24 cm a obsah 574 cm$^2$ a priemerný obsah je až (36+64+100+121+196+256+324+400+441+484+529+574)/12=293.75 cm$^2$.

**Riešenie: Na ostrove žije 7 štvorcov, rozmery najmenšieho sú 4x4 cm a najväčšieho 16x16 cm.**

***Príklad č. 2*** *(opravovala Betka Bohiniková)*

Tento príklad bolo možné riešiť viacerými spôsobmi, tu ukážem jeden z nich. Keďže hľadané číslo je deliteľné 60, vieme že určite bude deliteľné aj 10. Preto vieme že jeho posledná cifra je 0. Ďalej využijeme že naše číslo deliteľné bude deliteľné aj 4. A teda posledné dvojčíslie nášho 6-ciferného čísla musí byť deliteľné 4. S nulou na konci máme na výber, 20, 40, 60, 80. 20 vylúčime, pretože čísla sa nesmú opakovať a 2, ako vieme zo zadania, je na mieste tisícok. Hľadané číslo teda môže vyzerať nasledujúco: 1_2_40, 1_2_60 alebo 1_2_80.
Pozrime sa teraz na to ako z týchto čísel, vyškrtnutím troch cifier, získame prvočíslo. Určite budeme musieť vyškrtnúť posledné dve cifry, pretože párne čísla, až na dvojku, nie sú prvočísla. Ďalej vieme že určite nevyškrtneme cifru na mieste stoviek, lebo potom by sa nám 2 na mieste tisícok stala poslednou cifrou nášho čísla, a teda by to nemohlo byť prvočíslo.
Po vyškrtaní teda môžeme dostať prvočíslo v tvare: 1_ _, 12_ alebo _2_.
Pri hľadaní vhodných prvočíselných kandidátov môžeme využiť informáciu, že cifra pôvodne na mieste stoviek je väčšie ako cifra pôvodne na mieste desaťtisícou. A taktiež že cifry sa nám nesmú opakovať.
Na výber máme tieto prvočísla: 127, 137, 139, 149, 157, 167, 179, 829.
Teraz ešte využijeme že aby bolo naše číslo deliteľné 60, musí byť ešte deliteľné 3 a teda jeho ciferný súčet musí byť deliteľný 3. Potrebujeme teda vyrobiť z tých našich prvočísel pôvodné šesťciferné čísla, ktoré majú tvar 1_2_40, 1_2_60 alebo 1_2_80, a budú deliteľné 3.
Hľadané šesťciferné číslo mohlo byť teda jedno z týchto:
132780, 132960, 142980, 152760, 162760, 172980 alebo 182940

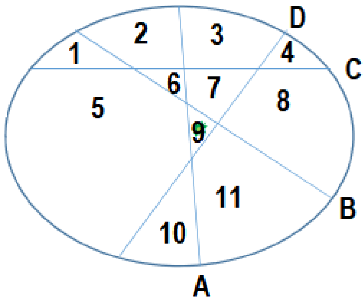
***Príklad č. 4*** *(opravovala Lenka a Miro Hudecovci)*

Skôr ako začneme umiestňovať čísla na jednotlivé hrany kocky, pokúsme sa zistiť, aké je naše cieľové vrcholové číslo – to by malo výrazne zredukovať počet neúspešných pokusov. Každá hrana spája dva vrcholy, to znamená, že každé číslo na hrane sa použije dva krát a bude teda započítane v dvoch vrcholových číslach. Ak teda spočítame čísla na všetkých hranách a vynásobíme to dvoma, dostaneme celkový súčet všetkých vrcholových čísel. Ak túto hodnotu vydelíme počtom vrcholov, dostaneme hodnotu jedného vrcholového čísla.

(1+ 2 + 3 + … + 11 + 12) * 2 / 8 = 19,5.

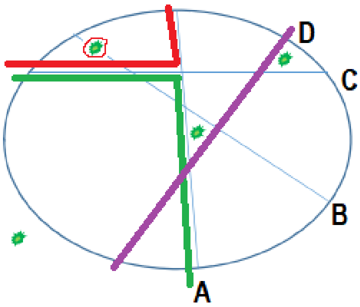
Ale keďže súčtom celých čísiel nevieme získať hodnotu 19,5, tak sme práve zistili, že **hrany sa nedajú očíslovať tak, aby boli splnené podmienky zadania**. Tým pádom je to babka Šebestová, kto má pravdu.

***Príklad č. 3** (opravovala Baša Marečáková)*



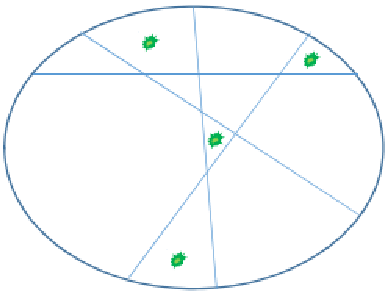

Aby sme mohli jednoducho ukazovať, ako skúšame riešenia, tak si označíme oblasti a chodníčky – oblasti budú označené číslami od 1 do 11 a chodníčky písmenami A, B, C, D ako na obrázku.

Keďže vieme, že máme zasadiť 4 sadeničky, tak na jednej strane cestičky musíme mať 2 a na druhej strane tiež 2. Sadeničku zasadenú Arthurom máme v oblasti 9. Pozrieme sa na chodníček C (takmer vodorovný). Prečo práve C? Na jednej strane má len 4 územia (čísla 1, 2, 3, 4), čiže na skúšanie možností je to najmenej – potrebujeme uložiť 2 sadeničky do týchto území a 1 sadeničku ešte do zvyšných (čísla 5 až 11). Zároveň sa poďme pozrieť na chodníček D. O ňom vieme, že v číslach 1, 2, 3, 5, 6, 7 a 9 môžeme dať len 1 sadeničku (lebo v 9 už jednu máme), aby sme mali na oboch stranách cesty rovnako veľa sadeničiek. **Na základe C a D vieme, že v oblasti 4 musí byť sadenička.** Inak by museli byť dve v oblastiach 1, 2 alebo 3, a to by spôsobilo problém pre D.




Ak sa pozrieme na chodníčky A a C, tak porovnaním počtov na jednotlivých stranách prídeme na to, že jedna sadenička musí byť na územiach 1 alebo 2 a posledná sadenička musí byť na 5, 6, alebo 10.

Kde presne musíme mať sadeničky nám prezradia chodníčky B a D. V červenom území je určite sadenička, teda spolu s tou na území 9 sú na jednej strane D už dve. **Vieme, že musí byť sadenička v zelenom území a zároveň na opačnej strane D, čo spĺňa len územie 10.** Na záver sa pozrieme na chodníček B, kde sú územia so sadeničkami 10 a 9 na jednej strane a 4 na druhej strane. Chýba nám sadenička v červenej oblasti. Prienikom je len územie číslo 2.



Našli sme riešenie úlohy ako je na poslednom obrázku, kde sú **sadeničky v územiach s číslami 2, 4, 9 a 10.** Ešte je dobré opýtať sa, či to je jediné riešenie. Pri skúšaní možností, sme našli práve jednu v každom kroku – nikdy sme nedostali „na výber". Takto sme prešli všetky možnosti uloženia, teda je to jediné riešenie.