

## SEZAMKO 2007/2008, Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Milí riešitelia,

prišla nám záplava pekných riešení, ktorým sa trpaslíci, Snehulienka a aj my veľmi potešili. Bolo vidno, že ste si dali záležať. Netreba však nič nechať na náhodu a treba ďalej rozvíjať svoje matematické bunky. K tomu vám pomôžu aj tieto vzorové riešenia, poriadne si ich preštudujte.

V prípade, že sa vám túto sériu veľmi nedarilo, určite to bude v ďalšej sérii lepšie. Čaká na vás nových 5 príhod, ktoré Snehulienka s trpaslíkmi zažila.

Napokon malá prosba – skúste si v poradí skontrolovať svoje údaje. Pokiaľ sú náhodou nesprávne, dajte nám o tom spolu s ďalšou sériou vedieť. Nezabudnite poriadne vyplňať hlavičky na riešeniach a posielat' nám aj obálky, aby opravené riešenia spolu s novými zadaniami dorazili na správnu adresu. Každý príklad treba písať na zvlášť papier, lebo úlohy opravujú rôzni ľudia.

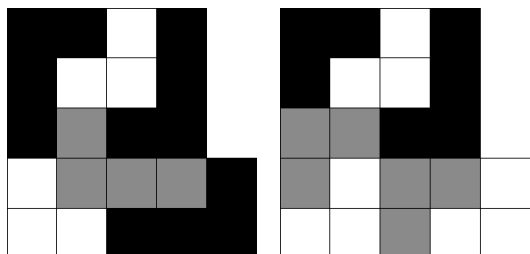
Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú trpaslíci, Snehulienka a organizátori.

### Úloha 1 (opravoval Škrečok Prusák)

Najprv si zrátame, že kuchyňa trpaslíkov má obsah 22 štvorcíkov. Teraz poďme zistiť, koľko ktorých dlaždičiek môže kráľovský murár na vydláždenie kuchyne použiť.

- ☒ Ak by nepoužil žiadnu štvorkovú dlaždičku, musel by použiť iba trojkové, ale 22 sa nedá deliť tromi bezo zvyšku.
- ☒ Ak by použil jednu štvorkovú dlaždičku, ostalo by mu vydláždiť  $22 - 4 = 18$  štvorcíkov trojkovými dlaždičkami. To sa dá šiestimi, lebo  $3 \cdot 6$  je 18.
- ☒ Ak by použil dve štvorkové dlaždičky, musel by 14 štvorcíkov vydláždiť trojkovými, čo sa nedá.
- ☒ Ak by použil tri štvorkové dlaždičky, musel by 10 štvorcíkov vydláždiť trojkovými, čo sa opäť nedá.
- ☒ Pri použití štyroch štvorkových dlaždičiek mu ostane 6 štvorcíkov na vydláždenie trojkovými, čo sa dá pomocou dvoch trojkových dlaždičiek.
- ☒ Ak by použil päť štvorkových dlaždičiek, musel by 2 štvorce vydláždiť trojkovými, čo sa opäť nedá.

No a použiť viac ako päť štvorkových dlaždičiek už nemôže (premýšľajte si prečo). **Teda kuchyňa sa môže dať vydláždiť buď 1 štvorkovou a 6 trojkovými alebo 4 štvorkovými a 2 trojkovými dlaždičkami.** Otázka ešte je, či sa tam tieto počty dajú naukladať. Po chvíli hrania sa nájdeme napríklad takéto vydláždenia, ktoré ukazujú, že sa tam tieto počty dlaždičiek naozaj naukladať dajú:



Stačilo nájsť jedno vydláždenie ku každému počtu, nikde v zadaní sa nehovorilo o tom, aby ste to vydláždili všetkými spôsobmi. Ak ste sa to snažili urobiť, bola to práca navyše. Ale aspoň ste nakreslili veľa krásnych farebných obrázkov, na ktoré bola radosť pozerat' sa.

### Úloha 2 (opravovali Janka a Vojto Bálintovci)

Predstavte si ako mohla Snehulienka postupovať, keď chcela zistiť, ktoré vrece odložiť. Čo by sa stalo, keby odložila napríklad vrece so 4 kg múky? Zostalo by jej 19 vriec (1, 2, 3, 5, 6, ..., 20), ktoré dokopy vážia 206 kg. Priemerne nám na jedno z týchto vriec to vychádza  $206/19 = 10$  a zvyšok 16 kg. To nie je dobrý výsledok, musíme dostať celé číslo.

Skúsme ísť postupne. Ak odložíme vrece s 1 kg múky, zvyšné budú mať spolu 209 kg. To je priemerne  $209/19=11$  kg, hurá, také vrece máme. A už vieme, že Snehulienka môže odložiť vrece s 1 kg múky. Vyskúšame odložiť vrecia s 2, 3, ... až po 20 kg múky a zistíme, že dobrý výsledok dá ešte aj vrece s 20 kg. Vtedy vážia zvyšné vrecia 190 kg, takže priemer na jedno vrece je  $190/19 = 10$ , čo je celé číslo.

Tí najšikovnejší si zráтали dokopy hmotnosť múky vo všetkých vreciach, čo je  $1+2+3+\dots+20 = 210$  kg. Potom vedeli, že ak odčítajú 1, 2, ... alebo 20 kg, dostanú čísla  $210 - 1 = 209$ ,  $210 - 2 = 208$ ,  $210 - 3 = 207$ , ...,  $210 - 20 = 190$ . A spomedzi nich hľadáme také čísla, ktoré sa dajú deliť 19. Sú to čísla 209 a 190, čiže opäť dostávame ten istý výsledok. **Snehulienka mohla odložiť vrece s 1 kg alebo 20 kg múky.**

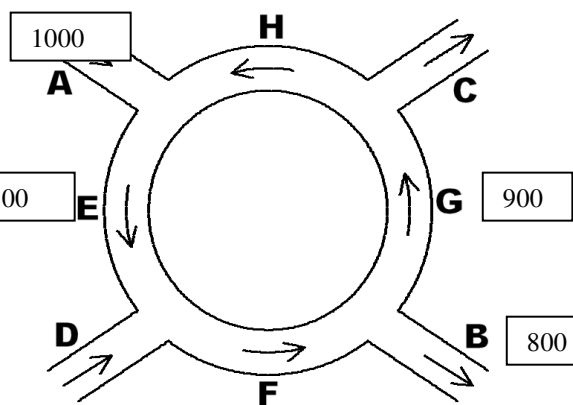
### Úloha 3 (opravoval Peťo Czimmermann)

Trpaslík, ktorý uhádol všetky tri údaje, musí mať spoločný údaj s každým zo zvyšných trpaslíkov. Každý z nich mal **aspoň jeden** údaj správny, a práve ten musí mať spoločný s trpaslíkom, ktorý má **všetky** údaje správne. Podľa tohto pravidla si skontrolujeme trpaslíkov a nájdeme toho, ktorý môže mať všetky údaje správne.

Kýblik nemá spoločný žiadny údaj s Mudrošom. Ani jeden z nich teda nie je ten, ktorý má všetko správne. Dudroš zase nemá ani jeden spoločný údaj s Papkošom a preto ani z nich nikto nemá všetko správne. Zostal posledný kandidát Smieško. Ten má našťastie spoločný aspoň jeden údaj s každým z ostatných. **Takže Smieško má všetky údaje správne, 17. marca mala Snehulienka dvadsať osem rokov.** Z postupu je navyše jasné, že toto je jediné riešenie našej úlohy – nikto iný nemôže mať správne všetky údaje.



### Úloha 4 (opravoval Hynek Bachratý)



Na obrázku sú pripísané zadané hodnoty  $A$ ,  $E$ ,  $B$  a  $G$ . Na určenie počtov pri ďalších úsekoch je najlepšie uvažovať o jednotlivých križovatkách, kde sa stretávajú tri cesty. Najprv si môžeme všimnúť  $H$ ,  $A$ ,  $E$ . Vozy, ktoré videli na úseku  $E$ , na neho mohli prísť len vjazdom  $A$  alebo úsekom  $H$ . Aby sedeli počty, na úseku  $H$  teda museli vidieť chýbajúcich 500 vozov. Potom úsekom  $E$  prešlo  $500+1000 = 1500$ , čo je dobre.

Podobná situácia je s úsekmi  $F$ ,  $B$  a  $G$ . Všetky vozy, ktoré videli na  $B$  alebo na  $G$ , museli predtým prejsť po úseku  $F$ . Bolo ich teda  $800+900=1700$ . Keď už vieme, že  $E=1500$  a  $F=1700$ , je jasné, že na úseku  $D$  museli vidieť chýbajúcich 200 vozov. A keďže  $G=900$  a  $H=500$ , na úseku  $C$  sa dalo vidieť 400 vozov, ktoré tam museli z objazdu zmiznúť.

**Výsledok teda bol  $D=200$ ,  $F=1700$ ,  $C=400$  a  $H=500$ .** Hodnoty sa dali určiť aj v inom poradí a trochu zložitejšími úvahami. Dôležité ale bolo, aby vaše vysvetlenie bolo správne bez ohľadu na to, ako vozy po objazde jazdili. Naši hrdinovia síce pozerali na objazd celé poobedie, ale povedali nám len celkové počty vozov a nie ako presne jazdili.

### Úloha 5 (opravoval Jakub Daubner)

Prišlo veľa pekných a dobrých riešení. Väčšinou ste úlohu riešili prebratím všetkých možností, ktoré mohla Snehulienka poskladať. Ale našlo sa aj pár iných a tiež veľmi pekných riešení. Teraz si ukážeme práve jedno z nich.

Najskôr si všimneme, že:

- ☒ Iba na štvorsten sa míňa pri stavbe viac vetvičiek (6) ako šípiek (4).
- ☒ Iba na úsečku sa míňa pri stavbe viac šípiek (2) ako vetvičiek (1).

Keďže máme minúť 13 vetvičiek a 12 šípiek (viac vetvičiek ako šípiek), musíme postaviť aspoň jeden štvorsten. Potom nám ostane 7 vetvičiek a 8 šípiek, máme viac šípiek ako vetvičiek, takže musíme postaviť aspoň jednu úsečku. Napokon nám ostane 6 vetvičiek a 6 šípiek, z čoho môžeme postaviť už len 2 trojuholníky. Keby sme chceli postaviť ďalší štvorsten alebo úsečku, tak nám to už určite nevyjde.

**Takže Snehulienka môže vyrobiť jedine tieto štyri ozdoby: 1 štvorsten, 1 úsečku a 2 trojuholníky. A to je zároveň aj najviac ozdôb, ktoré môže vyrobiť.**