SEZAMKO 2009/2010, Vzorové riešenia 1. série letnej časti

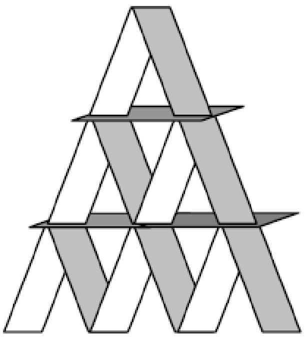
Milí riešitelia,
prišlo nám veľa pekných a hlavne správnych riešení. Kochab so Santom Mrázom a jeho sobmi sa im potešili, pretože ste si dali na riešení záležať. Aby ste však rozvíjali svoje matematické myslenie aj naďalej, poriadne si preštudujte tieto vzorové riešenia. V prípade, že sa vám túto sériu veľmi nedarilo, určite to bude v ďalšej sérii lepšie. Čakajú na vás nové štyri príhody, ktoré sa prihodili Kochabovi a ďalším našim hrdinom.

Ak sa vám bude dariť aj v ďalších sériách, môžete sa tešiť na sústredenie pre najlepších riešiteľov, ktoré pre vás chystáme od 20. do 22. mája. Ak máte spolužiakov či kamarátov, ktorí by takisto radi riešili SEZAMKA, len nestihli termín prvej série, požičajte im zadania druhej série. Ak budú usilovní, určite sa aj im podarí dostať sa spolu s vami na letné sústredenie.

Napokon malá prosba – skúste si v poradí skontrolovať svoje údaje. Pokiaľ sú náhodou nesprávne, dajte nám o tom spolu s ďalšou sériou vedieť. Nezabudnite poriadne vypĺňať hlavičky na riešeniach a posielať nám aj obálky, aby opravené riešenia spolu s novými zadaniami dorazili na správnu adresu.

Veľa úspechov v ďalších sériách vám želajú medveď Kochab, Santa Mráz, jeho soby a organizátori.

Úloha 1 (opravovala Kika Kovalčíková)



Jedna z možností, ako zistiť počet kariet v 10-poschodovom domčeku, je rozdeliť si ho na poschodia. To sa dá urobiť dvojako, my si ukážeme jeden spôsob. O každom z desiatich poschodí domčeka zistíme, koľko kariet sa v ňom nachádza.

Najvrchnejšie prvé poschodie bude tvorené iba obyčajnou strieškou, sú v ňom 2 karty. Druhé poschodie potom obsahuje 5 kariet (dve striešky a jednu vodorovnú kartu). Všimnite si, že vyzerá podobne ako prvé poschodie, len sú k nemu zboku pristavané dve karty a tretia je položená hore.

Tretie poschodie dostaneme zase tak, ako keby sme k druhému pristavili zboku rovnakým spôsobom ďalšie dve karty a tretiu položili hore. Postupným pridávaním ďalších trojíc kariet dostaneme nové poschodia. Keď už budeme mať všetkých 10 poschodí, ich spojením dostaneme celý domček.

Koľko kariet je v jednotlivých poschodiach? V prvom sú 2 karty, v druhom 5 kariet, v treťom 5+3 = 8 kariet, v štvrtom poschodí 11 kariet (zase o tri viac), v piatom poschodí 14 kariet, v šiestom 17 kariet, v siedmom 20 kariet, vo ôsmom 23 kariet, v deviatom 26 kariet a v poslednom desiatom je 29 kariet. **V každom poschodí je o tri karty viac ako v predchádzajúcom.** Počet kariet v celom domčeku dostaneme tak, že sčítame karty v jednotlivých poschodiach. **Takto už ľahko zistíme, že ich tam je 155.**

Úloha 2 (opravovala Lenka Matejovičová)

Keď sa snažíme zistiť, koľkými spôsobmi sa nejaký počet cukríkov dá spravodlivo rozdeliť, stačí nám vedieť počet deliteľov tohoto čísla. (Delitele nejakého čísla sú všetky také prirodzené čísla, ktorými sa dá naše číslo deliť bezo zvyšku.) V našom príklade teda hľadáme päť čísel, ktoré majú **presne šesť rôznych deliteľov** (dajú sa spravodlivo rozdeliť presne šiestimi rôznymi spôsobmi). Takéto čísla určite nájdeme vyskúšaním všetkých možností, ale keby sme napríklad skúšali všetky čísla po 32, bolo by to veľmi veľa počítania a mohli by sme sa veľakrát pomýliť. Preto skúsime iba niekoľko čísel a ostatné si tipneme a otestujeme, či sú dobré.

Vieme, že môžeme rovno **vylúčiť všetky prvočísla** (2, 3, 5, 7, 11, ...), pretože tie majú len dva delitele, a to jednotku a samého seba.

Teraz vyskúšame nejaké ďalšie čísla. Za dvojbodkou sú vypísané všetky delitele od najmenšieho (to je vždy 1) po najväčšie (to je vždy dané číslo). Ostatné delitele stačí skúšať iba do polovice toho čísla, napríklad pre 12 do 6, pretože medzi 6 a 12 už nemôže byť žiadny deliteľ (rozmyslite si prečo).

4: 1, 2, 4	**9**: 1, 3, 9
6: 1, 2, 3, 6	**10**: 1, 2, 5, 10
8: 1, 2, 4, 8	**12**: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Hurá, našli sme prvé dobré číslo! Skúsime sa pozrieť, prečo je číslo 12 dobré. V jeho rozklade na prvočísla je **dvakrát rovnaké prvočíslo a jedenkrát iné prvočíslo**: 12 = 2.2.3. Preto jeho delitele budú iba tieto možnosti: 1 (ani jedno prvočíslo), 2, 3, 4 = 2.2, 6 = 2.3 a 12 = 2.2.3.

Rovnako to bude fungovať pre všetky také **čísla, ktoré vzniknú vynásobením dvakrát rovnakého prvočísla a jedenkrát iného prvočísla**, teda aj 18 = 3.3.2, 20 = 2.2.5, 28 = 2.2.7, 45 = 3.3.5, môžete si to vyskúšať.

Podobne je to ešte aj s iným druhom čísel, a to takými, ktoré vzniknú vynásobením päťkrát rovnakého prvočísla, napríklad 32 = 2.2.2.2.2. Delitele takéhoto čísla sú potom tvaru 1, 2, 4 = 2.2, 8 = 2.2.2, 16 = 2.2.2.2 a 32 = 2.2.2.2.2. Rovnako to bude fungovať pre ďalšie také čísla 243 = 3.3.3.3.3, 3125 = 5.5.5.5.5 alebo 16 807 = 7.7.7.7.7, a tak ďalej (môžete si skúsiť nájsť nasledujúce čísla).

Ako vidíte, **takých čísel, ktoré sa dajú spravodlivo rozdeliť na šesť častí, je naozaj dosť (nekonečne veľa).** Na získanie plného počtu bodov stačilo nájsť päť z nich. To sa mnohým aj podarilo, z čoho sa veľmi tešíme.

Úloha 3 (opravovala Denisa Múthová)

☺				
	8	16		
			21	
	12		18	
			15	25

☺	2	4	3	5
4	8	16		
7			21	
6	12		18	
5			15	25

Našou úlohou je dopísať do tabuľky na prázdne šedé a biele políčka čísla. Musí však pritom platiť, že **každé číslo na bielom políčku je súčinom čísel na šedých políčkach na začiatku riadka a na vrchu stĺpca, v ktorom je príslušné biele políčko**. Spôsobov na vypĺňanie tabuľky je viacero, my si ukážeme ten najjednoduchší. Dopisujte si počas čítania podľa postupu čísla do hornej tabuľky.

Najlepšie je začať s číslom 15, ktoré môžeme dostať dvoma spôsobmi, buď ako 5.3 alebo ako 15.1 (veľa z vás na násobenie jednotkou pozabudlo). Ľahko však zistíme, že 15.1 to byť nemôže, pretože ak by bolo 15 v šedom políčku na začiatku riadka alebo na vrchu stĺpca, potom by ňou museli byť deliteľné buď číslo 25 alebo čísla 18 a 21, čo nie sú.

Bude tam preto 5.3, pričom 5 musí byť v rovnakom riadku ako 25 (pretože 25 nie je deliteľné tromi). Potom môžeme doplniť šedé políčko na vrchu posledného stĺpca ako 25:5 = 5. V štvrtom riadku a prvom stĺpci je šedé políčko, ktoré bude obsahovať číslo 18:3 = 6. V treťom riadku a prvom stĺpci musí byť 21:3 = 7. V prvom riadku a druhom stĺpci bude 12:6 = 2. No a nakoniec v druhom riadku a prvom stĺpci musí byť 8:2 = 4 a v prvom riadku a treťom stĺpci 16:4 = 4. Šedé políčka už sú doplnené tak ako na druhom obrázku. Už len treba doplniť biele políčka, čo určite ľahko zvládne každý z vás (veď je to len malá násobilka).

Nakoniec riešenia ešte treba napísať, že úloha má iba toto jedno riešenie. **Šedé políčka sa dali doplniť iba jedným spôsobom, aby súhlasili všetky súčiny na bielych políčkach.**

Úloha 4 (opravovala Ajka Bachratá)

V prvom rade by som chcela veľmi pochváliť všetkých, ktorí si túto hru naozaj zahrali. Vďaka nim máme výsledky, o ktorých teraz môžeme spoločne porozmýšľať. Dokopy sa nám podarilo zahrať 19 hier. Z nich v 10 hrách bolo viac párnych súčtov (budeme to volať, že vyhral párny súčet) a v 9 hrách viac nepárnych súčtov (vyhral nepárny súčet). Po odohraní hry ste sa snažili vysvetliť, prečo vyhral párny alebo nepárny súčet, podľa toho čo Vám vyšlo (ďalší o tom len rozmýšľali a hru neskúšali). Niektorí mali voči ostatným trochu výhodu, pretože si zahrali až dve hry a tak mali viac výsledkov, nad ktorými mohli rozmýšľať. My teraz môžeme rozmýšľať dokonca nad všetkými 19-timi hrami.

Keby nám napríklad vyšlo, že z týchto 19 hier vyhrá 18-krát párny súčet, tak môžeme Kochabovi rovno poradiť párne čísla. Nám ale vyšlo, že **párny a nepárny súčet vyhráva skoro rovnako často**. A aj keď jeden z nich vyhrá, tak je to tesne (napríklad 45 párnych a 55 nepárnych). Preto si môžeme tipnúť, že nie je jasné, čo padá častejšie. A už len stačí vysvetliť, prečo by to malo byť práve takto.

Keď sa pozrieme, ktoré súčty môžu padnúť na dvoch kockách, dostaneme **šesť párnych súčtov 2, 4, 6, 8, 10 a 12; a päť nepárnych súčtov 3, 5, 7, 9, 11**. Vyzerá to tak, že nepárnych je menej, takže by mali vyhrávať párne. To ale ešte stále nie je úplne pravda, pretože **nie všetky súčty nám padajú rovnako často**. Skúste si hodiť 25-krát kockami a spočítať, koľko krát padne súčet 2 a koľko krát súčet 7. Nám nepadol súčet 2 ani raz, ale súčet 7 až päť krát. Je to preto, že súčet 7 má väčšiu šancu padnúť ako súčet 2. Aby padol súčet 2 potrebujeme aby na obidvoch kockách padli jednotky, takže ho vieme dostať len jediným spôsobom. Zatiaľčo súčet 7 vieme dostať napríklad keď padne na jednej kocke 1 a na druhej 6, keď padne 2 a 5, 3 a 4, 4 a 3, 5 a 2 alebo 6 a 1. Čo je až šesť rôznych možností. A teda súčet 7 by mal padať približne šesťkrát častejšie ako súčet 2. Spočítajme počet jednotlivých možností, ako vie padnúť každý možný súčet od 2 po 12:

2:	**1+1**	**1 možnosť**
3:	1+2 alebo 2+1	2 možnosti
4:	**2+2 alebo 1+3 alebo 3+1**	**3 možnosti**
5:	4+1 alebo 3+2 alebo 2+3 alebo 1+4	4 možnosti
6:	**5+1 alebo 4+2 alebo 3+3 alebo 2+4 alebo 1+5**	**5 možností**
7:	6+1 alebo 5+2 alebo 4+3 alebo 3+4 alebo 2+5 alebo 1+6	6 možností
8:	**6+2 alebo 5+3 alebo 4+4 alebo 3+5 alebo 2+6**	**5 možností**
9:	6+3 alebo 5+4 alebo 4+5 alebo 3+6	4 možnosti
10:	**6+4 alebo 5+5 alebo 4+6**	**3 možnosti**
11:	6+5 alebo 5+6	2 možnosti
12:	**6+6**	**1 možnosť**

Keď spočítame, koľko je spolu možností padnutia párnych a nepárnych súčtov, dostaneme, že **ich je rovnako veľa** (konkrétne osemnásť). Takže Kochabovi vieme povedať, že si môže vybrať čokoľvek, lebo šanca, že vyhrá je rovnaká pre párne aj nepárne súčty. Ale istotu, že vyhrá mať nebude. Dokonca vieme, že ani nijakú výhodu.