SEZAMKO 2009/2010, Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Milé deti,
vonku už pomaly prišla jar a k vám pomaly prichádza nová séria SEZAMKa. Všetci opravovatelia sa potešili vašim pekným riešeniam. Vy sa teraz môžete potešiť z bodov, ktoré ste za tieto riešenia dostali. Ak tých bodov nebolo veľa, nezúfajte, nabudúce to bude určite lepšie. Nezabudnite si prečítať tieto vzorové riešenia. Prezradia vám, ako sa úloha mala riešiť, kde ste urobili chybu alebo vám ukážu, ako sa dala úloha vyriešiť inak než ste ju riešili vy.
Dúfame, že ste si cez Veľkú noc dobre oddýchli a s chuťou sa vrhnete na štyri nové príklady – tie sú posledné v tejto letnej časti SEZAMKa. Po ich úspešnom vyriešení vás od 20. do 22. mája čaká sústredenie s kopou zábavy, novými kamarátmi a samozrejme matematikou.
Už teraz sa na vás teší medveď Kochab, Santa Mráz, beduíni a aj my, organizátori SEZAMKa.

Úloha 1 (opravoval Hynek Bachratý)
Najskôr si pripomeňme zadanie. Päť domorodcov, pre jednoduchosť ich nazveme A, B, C, D a E, pri spoločnej práci dodržiavajú štyri zásady:

1. Ak pracuje B, potom aj A a C.
2. Vždy pracuje D alebo E, no nikdy nie naraz.
3. Ak pracuje C, potom aj D.
4. Vždy pracuje A alebo B, môžu aj spolu.

Úlohou bolo nájsť všetky skupiny domorodcov, ktoré môžu pri týchto zásadách pracovať spolu. Pri hľadaní skupín je dôležité, aby sme mali istotu, že sme na žiadnu nezabudli. Takisto tie skupiny, čo sme našli, musia zodpovedať zásadám. Jedna bezpečná metóda je **skontrolovať úplne všetky skupiny** a vylúčiť tie zlé. Je ich až 32, od najmenšej, keď nepracuje nikto, po najväčšiu, keď pracuje všetkých 5 domorodcov. To je veľa roboty, ktorá sa dá ušetriť. Napríklad zo zásad 2 a 4 je jasné, že pracujú vždy aspoň dvaja, a nikdy nie všetci piati. **Stačí preto vyskúšať 2, 3 a 4-členné skupiny, ktorých je len 20.**

Najlepšie ale je využívať zásady aj pri hľadaní. Najvhodnejšia na to je zásada 4. Podľa nej vždy pracuje A alebo B. Ak pracuje B, podľa 1. zásady musí pracovať aj A a C. Ak pracuje C, musí podľa 3. zásady aj D, a podľa druhej potom nesmie pracovať E. **Skupina A, B, C, D vyhovuje** všetkým zásadám a je prvou možnosťou. Zároveň toto je jediné riešenie v prípade, že pracuje B.

Ak nepracuje B, podľa 4. zásady musí pracovať A. Ako je to s C? Podľa zásad môže aj nemusí pracovať. Ak áno, spolu s ním musí aj D a potom nemôže E. **Ďalšia skupina je preto A, C, D.** Pokiaľ C nepracuje, zostávajú ešte D a E. Z nich podľa dvojky vždy jeden pracovať musí, a spolu nemôžu. Dostávame ešte **možnosť A, D a možnosť A, E.**

Všetky štyri skupiny spĺňajú zásady, lebo sme ich tak vytvárali. Môžeme to prípadne ešte raz skontrolovať. Z postupu je tiež jasné, že sme postupne prebrali všetky možnosti, ktoré prichádzajú do úvahy pri splnených zásadách.

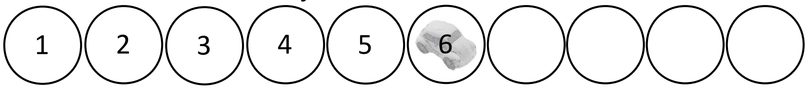
Úloha 2 (opravovala Soňa Galovičová a Katka Jasenčáková)
Všimnime si, že na každom míľniku je súčet čísel rovný súčtu vzdialenosti od míľnika do mesta a od míľnika do oázy, čo je vlastne **dĺžka celej cesty**. Ak teda sčítame na každom míľniku čísla, ktoré sú na ňom napísané, musí nám vždy vyjsť rovnaký výsledok, ktorý vyjadruje, ako ďaleko je mesto od oázy.

Míľnikov na ceste je o jeden menej ako míľ. Skúsme si predstaviť cestu od oázy k mestu – vždy, keď zbadáme míľnik, znamená to, že sme prešli o míľu viac. Na konci však musíme ešte jednu míľu pripočítať, a to od posledného míľniku k mestu, kde sa už žiaden nenachádza.

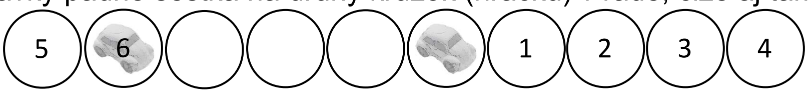
To znamená, že súčet všetkých čísel na všetkých míľnikoch je vzdialenosť, ktorú hľadáme vynásobená počtom míľnikov. Vieme, že tento súčin sa má rovnať 110. Keďže míľ je o jednu viac ako míľnikov, **hľadáme dve po sebe idúce čísla, ktorých súčin je 110.** Vyskúšaním niekoľkých možností ľahko prídeme na to, že vyhovuje iba dvojica 10 a 11. Ak by sme urobili súčin čísel 9 a 10 (alebo ešte menších), bolo by to určite menej ako 110. Naopak, súčin čísel 11 a 12 (alebo ešte väčších) je väčší ako 110. **Vzdialenosť od oázy k mestu je teda 11 míľ a spolu tam je 10 míľnikov.**

Úloha 3 (opravovala Erika Trojáková)
Beduíni si vyberajú hračky z radu za pomoci vypočítavky popísanej v zadaní. Nakreslime si desať prázdnych krúžkov a predstavme si, že každý z nich predstavuje autíčko alebo bábiku. Zatiaľ ale nevieme, ktorý krúžok predstavuje ktorú z týchto dvoch hračiek. Ak by sme si zahrali vypočítavku s týmito krúžkami (hračkami), tak zistíme, ktoré hračky z radu si beduíni vyberú. Stačí potom dať autíčka do tých krúžkov, ktoré si vybrali. Presnejšie, **keď budeme vedieť, že na niektorý krúžok vyjde šestka, tak tam nakreslíme autíčko**. Pri ďalšom kole vypočítavky už takýto krúžok preskočíme. Preskakovanie takéhoto okienka je dôležité, lebo **tým, že je v ňom nakreslené autíčko, sme ho vlastne podľa beduínskej vypočítavky už vybrali z radu preč**.

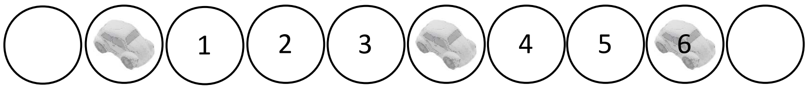
Takže pekne po krokoch. V prvom kole vypočítavky padne autíčko na šiesty krúžok (hračku) v rade. Túto hračku by si beduíni vybrali. Teda tam musí byť autíčko.



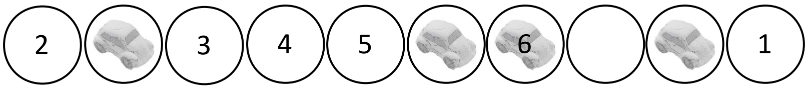
V ďalšom kole vypočítavky padne šestka na druhý krúžok (hračku) v rade, čiže aj tam musí byť autíčko.



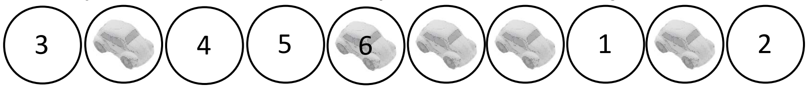
Keď si vyberá hračku tretí beduín, tak šestka padne na deviaty krúžok (hračku) v rade. Všimnime si, že sme pritom museli jedno nakreslené autíčko preskočiť (podľa toho, čo sme pred chvíľou vysvetlili).



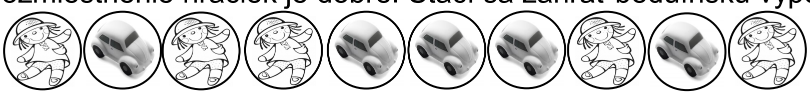
V ďalšom kole vypočítavky padne šestka na siedmy krúžok v rade. Štvrtý beduín by si vybral túto hračku (tiež musíme niektoré krúžky preskakovať), preto tam tiež musí byť autíčko.



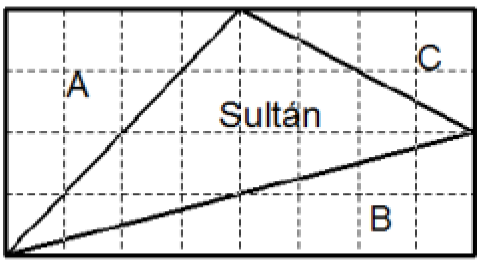
V poslednom kole vypočítavky padne šestka na piaty krúžok v rade. Aj tam musíme dať autíčko.



Zvyšné prázdne okienka budú bábiky, na ktoré nám šestka vo vypočítavke nepadla. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že takéto rozmiestnenie hračiek je dobré. Stačí sa zahrať beduínsku vypočítavku ešte raz.

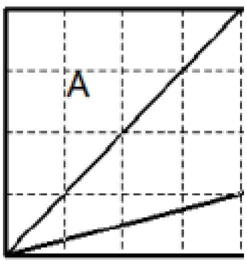


Úloha 4 (opravoval Michal Prusák)

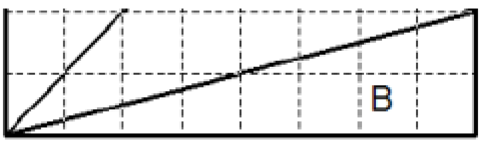


Tento príklad sa dal riešiť dvoma rôznymi spôsobmi. Prvý spôsob bol rozstrihať obrázok na dieliky a ukladať ich k sebe. Tam ale vzniká problém – čo ak sme dielik vystrihli nepresne a náhodou nám pasuje aj tam, kde by pasovať nemal (napríklad niektoré časti sultánovho pozemku sú veľmi zvláštne).

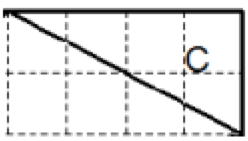
Preto si radšej ukážeme druhý spôsob, ktorý je omnoho istejší a presnejší. Označme si pozemky troch sultánovych žien ako A, B a C. Najprv vyrátame veľkosti týchto troch pozemkov. So sultánovym pozemkom si poradíme neskôr.



Pozrime sa najskôr na **pozemok A**. Ak si kúsok obrázka odmyslíme, veľmi ľahko uvidíme, že veľkosť pozemka A je presne polovica zo štvorca 4 krát 4 míle. Prvá žena preto dostala pozemok o veľkosti polovica zo 4.4 = 16, čo je **8 štvorcových míľ**.



Podobným spôsobom zistíme, že veľkosť **pozemku B** je presná polovica z obdĺžnika 8 krát 2 míle. Druhá žena preto dostala pozemok o veľkosti polovica z 8.2 = 16, čo je opäť **8 štvorcových míľ**.



Napokon sa pozrime na **pozemok** poslednej ženy **C**. Jeho veľkosť je presná polovica z obdĺžnika 4 krát 2 míle. Tretia žena preto dostala pozemok o veľkosti polovica zo 4.2 = 8, čo sú **4 štvorcové míle**.

Poznáme teda veľkosti pozemkov všetkých troch žien. Sultán im spolu rozdal 8 + 8 + 4 = 20 štvorcových míľ pozemkov. Ostáva nám určiť už len veľkosť jeho pozemku. Najjednoduchšie je vyrátať veľkosť celého pozemku a odpočítať to, čo rozdal svojim ženám. Celý pozemok je obdĺžnik 8 krát 4 míle, jeho veľkosť je 8.4 = 32 štvorcových míľ. **Na sultánov pozemok teda pripadá 32 - 20 = 12 štvorcových míľ.** Hotovo.