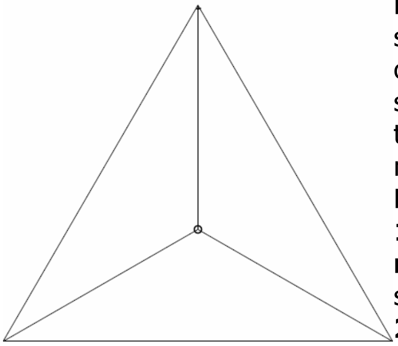
SEZAMKO 2011/2012, Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Milí riešitelia,
spolu s jarou k vám prichádza aj nová séria SEZAMka. Jonatán s Jonatánkou sa veľmi potešili vašim riešeniam. Ak ich chcete nabudúce potešiť ešte viac, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia. Prezradia vám, ako sa úlohy mali riešiť, kde ste urobili chybu alebo vám ukážu, ako sa dala úloha vyriešiť inak než ste ju riešili vy.
Okrem týchto vzorových riešení vám došli aj zadania poslednej série letnej časti SEZAMka. Po ich úspešnom vyriešení najlepších z Vás na konci mája čaká sústredenie s kopou zábavy, novými kamarátmi a samozrejme matematikou.
Pokiaľ ste počítali len 1. sériu, a nestihli druhú, ešte stále môžete zabojovať a poriadne spočítať túto poslednú, tretiu. S dvomi dobrými sériami sa dá na sústredenie určite dostať, preto neváhajte a využite príležitosť.

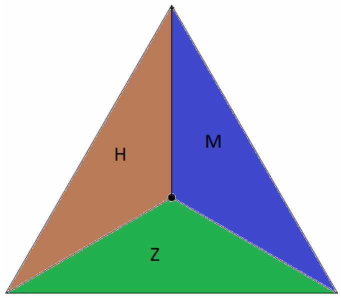
Veľa úspechov v tretej sérii vám želá Jonatán spolu s celým vlakovým personálom.

Úloha 1 (opravoval Mojo Majdiš)

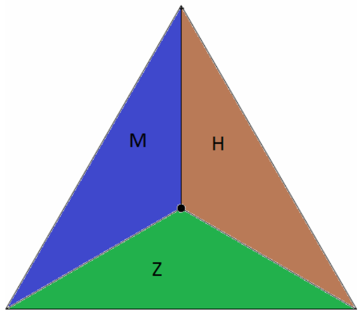


Pozrime sa na koláčik zhora (obrázok vľavo). Vidíme všetky zafarbované steny, akoby to boli časti rovnostranného trojuholníka. Všimnime si, že otočením o 60° alebo o 120°, nám vznikne úplne rovnaký útvar. Preto ak sa zafarbenia dvoch koláčikov líšia len o takéto otočenia, tak vlastne ide o to isté zafarbenie. K dispozícii máme polevy štyroch farieb. Vyberme si napríklad zelenú (označíme ju Z), modrú (M), hnedú (H) a fialovú (F) farbu. Musíme rozobrať niekoľko možností.

1. všetky steny sú zafarbené tou istou polevou. Tu **máme štyri možnosti**: všetky zafarbované steny sú Z, M, H alebo F.

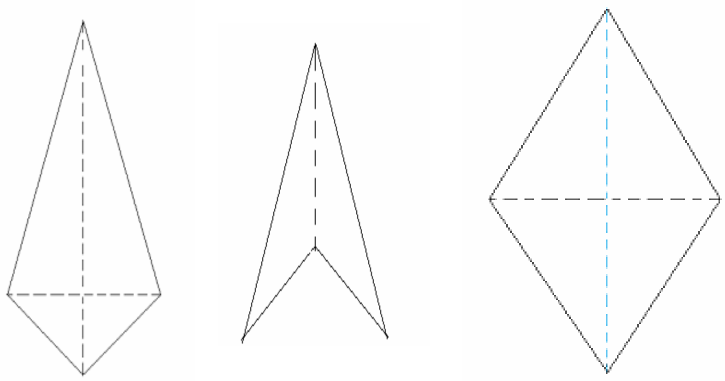


2. dve steny sú ofarbené rovnakou polevou a tretia je inou. Spočítajme, koľko je takých zafarbení. Máme 4 možnosti, ako si vybrať polevu na dve rovnaké steny. Ku každej z týchto štyroch možností máme 3 možnosti, ako zafarbiť tretiu stenu. To je dokopy 4 x 3 = 12 možností. Rozmyslite si, že ak máme vybrané obe polevy – aj tú na dve steny, aj tú na jednu stenu – tak už máme len jednu možnosť, ako taký koláčik zafarbiť (napríklad si to môžete nakresliť). Preto v tomto prípade **dostaneme** presne **12 možností**.



3. každá stena je zafarbená inou polevou. Uvedomme si, že vybrať tri polevy zo štyroch na zafarbenie koláčika, je to isté, ako vybrať jednu, ktorú na zafarbenie koláčika nepoužijeme. Teda máme štyri možnosti ako vybrať farby. Koľko rôznych koláčikov môžeme vytvoriť, ak už máme vybraté tri rôzne polevy (napríklad Z,M a H)? Ak by sme koláčik neotáčali, tak ich vieme zafarbiť šiestimi rôznymi spôsobmi (rozmyslite si prečo), avšak ako sme na začiatku povedali, tak postupným otáčaním, sa nám jeden koláčik môže javiť až ako tri rôzne. Ak teda máme vybraté tri rôzne polevy, tak existujú 6 : 3 = 2 možnosti ako koláčik zafarbiť (obrázky vpravo). Pre každý zo štyroch výberov farieb teda dostaneme 2 rôzne koláčiky, **spolu teda** 4 x 2 = **8 možností**.
Dokopy teda môžeme upiecť až 4+12+8=24 rôznych koláčikov.

Úloha 2 (opravovala Denisa Muthova)
Najskôr zistíme či existuje štvoruholník, ktorý je **súmerný podľa jednej uhlopriečky** a nie je to štvorec. Pri zložení tohto štvoruholníka (skladáme ho podľa uhlopriečok) musí platiť, že sa vzniknuté trojuholníky prekryjú (budú rovnaké). Ďalej štvoruholník má mať uhlopriečky na seba navzájom kolmé pričom jedna z nich bude pretínať druhú presne v strede. Štvoruholník bude mať dve a dve rovnaké strany.
Obrázky: deltoid v tvare šarkana, štvoruholník s uhlom väčším ako 180° (Deltoid je útvar, v ktorom majú navzájom priliehajúce strany rovnakú veľkosť.)

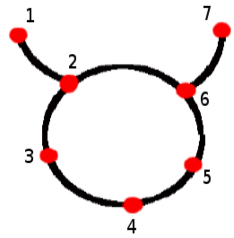


Štvoruholník **súmerný podľa oboch uhlopriečok** má uhlopriečky, ktoré sú na

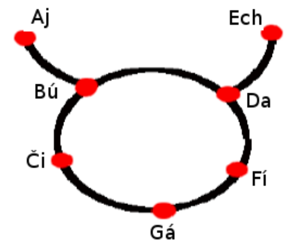
seba kolmé a delia sa navzájom na dve polovice. A všetky jeho štyri strany sú rovnako dlhé.
Obrázok: kosoštvorec

Úloha 3 (opravoval Miro Hudec)
Predpokladajme, že majiteľ hovorí pravdu. Z čísel 1 až 9 je len jedno násobok čísla 5 a to konkrétne 5-ka samotná. Táto 5-ka musí byť v aspoň jednej tabuľke 2x2. Súčin čísel tejto tabuľky bude číslom 5 deliteľný bezozvyšku, a teda aj súčiny v ostatných tabuľkách musia byť deliteľné 5-kou bezozvyšku.
To je možné len vtedy, **ak bude 5-ka v strede celého sadu** (na spoločnom políčku všetkých tabuliek 2x2). Z úplne rovnakých dôvodov nám ale vychádza, že **aj číslo 7 musí byť v strede**. A keďže tam môže byť iba jedno z nich, majiteľ pravdu nehovorí.

Úloha 4 <u>(opravovala Lenka Trojáková)</u>
Máme mestečko so 7 zastávkami **Aj, Bú, Či, Da, Ech, Fí, Gá**. Keďže nevieme, ako sú rozmiestnené, označme zatiaľ zastávky na mapke len číslami 1 až 7 ako na obrázku. V mestečku sú tri autobusové linky: **Aj, Bú, Da, Ech** a späť, **Či, Bú, Aj** a späť a **Či, Gá, Fí, Da** a späť.
Chceme zistiť, ako sú zastávky v mestečku rozmiestnené. Pozrime sa na to, koľko susedných zastávok majú jednotlivé zastávky v našich linkách.



Zastávka **Aj** susedí v prvej aj druhej linke so zastávkou **Bú**. O žiadnych ďalších susedoch nevieme. Pozor, neznamená to, že žiadnych ďalších nemôže mať! Nemôžeme teda povedať, že určite bude na mieste označenom 1 alebo 7. Mohla by byť napríklad na 4 a prvá a druhá linka by začínala tam...
Zastávka **Bú** susedí v prvej linke s **Aj** a **Da**, v druhej ešte aj s **Či**. Má teda troch susedov. Zastávka **Či** susedí s **Bú** a **Gá** (v prvej a tretej linke). Zastávka **Dá** susedí s **Bú**, **Ech** a **Fí**. Zastávka **Ech** susedí len s **Da**. **Fí** susedí s **Gá** a **Da**. Nakoniec **Gá** susedí s **Či** a **Fí**.
(Najlepšie bude, keď si teraz vezmeš ceruzku a papier a budeš si pri čítaní postupne kresliť :-))
Máme dve zastávky, ktoré majú troch susedov: **Bú** a **Da**. Len zastávky 2 a 6 majú troch susedov. Takže zastávky **Bú** a **Da** môžu byť len tieto dve a žiadne iné. Zvoľme si, že 2 bude **Bú** a 6 bude **Da**. Zastávka **Či** má dvoch susedov – **Bú** a **Gá**. Voľní susedia Bú su čísla 1 a 3 (na 6 už máme **Da**). **Či** však nemôžeme dať na 1, lebo by sme nemali kam dať jej suseda **Gá**. Preto **Či** musí byť na 3 a potom **Gá** na 4. Pre **Bú** nám ostal ešte jeden neumiestnený sused – **Aj**, ktorého musíme dať na pozíciu 1, lebo žiadnu inú už voľnú nemáme.



Gá susedí s **Či** – umiestnené na 3 – tak druhý sused **Gá**, ktorým je **Fí** musí byť na zastávke č. 5. Táto zastávka nám pekne sedí do tretej linky, ktorú zakončuje **Da**. umiestnime na posledné voľné miesto zastávku **Ech.** Keď si všetko skontrolujeme, tak zistíme, že takéto rozmiestnenie zastávok vyhovuje zadaniu.

Nesmieme zabudnúť na to, že sme mali dve možnosti na umiestnenie zastávok **Bú** a **Da**. Predtým sme dali **Bú** na 2, tak teraz ju dáme na 6 a **Da** dáme na 2. Podobnými úvahami, ako v predchádzajúcom riešení zistíme, že **Čí** musí byť na 5 a **Aj** na 7. Potom **Gá** na 4, **Fí** na 3 a **Ech** na 1.
Máme teda dve rôzne riešenia a jediná zastávka, ktorá sa volá na oboch rovnako je **Gá**. Nevieme preto na základe informácií zo zadania presne určiť, kde bude ktorá zastávka.