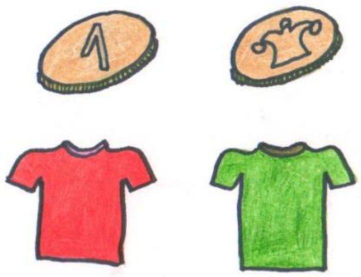
SEZAMKO 2017/2018, Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

Milí riešitelia,
spolu s druhou sériou sa končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMKA. Alica a Maťo vám všetkým ďakujú za pomoc pri riešení problémov, na ktoré natrafili. Pred vianočnými prázdninami si môžete ešte precvičiť vaše matematické bunky prečítaním týchto vzorových riešení. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

A hlavne nezabudnite, že všetkých pozývame na matematicko-športovo-rozprávkové stretnutie riešiteľov a organizátorov SEZAMKa v sobotu 9.12.2017 v Žiline na Fakulte riadenia a informatiky! A máme tu aj (skoro) jaskyňu! Podrobnosti nájdete v priloženej pozvánke.

Príklad č. 1 *(opravovali Erika a Peťo Novotní)*



Vieme, že naša bytosť si prezlieka tričká podľa plánu, ktorého podstatnú časť tvorí hod mincou. Predtým, ako sa pustíte do ďalšieho čítania, skúste si hádzať mincou aspoň sto hodov a sledujte, či vám padne častejšie znak alebo číslo. Do ďalšieho čítania sa pustite až vtedy, keď tento experiment urobíte.

Ak ste experiment naozaj poctivo urobili, tak vám asi vyšlo, že znak aj číslo, teda obe strany mince, ste hodili približne rovnako často. Inak povedané, pokiaľ hádžete mincou, tak šanca hodiť znak je rovnako veľká ako šanca, že hodíte číslo.

Skúsme sa teraz tváriť, že sme bytosťou z úlohy a riaďme sa podľa jej "prezliekacieho" plánu. Pre jednoduchosť uvažujme, že máme v pondelok oblečené červené tričko. Ako môže vyzerať situácia v utorok?:

- buď sme hodili číslo a teda si oblečieme červené tričko;
- alebo sme hodili znak a oblečieme si modré tričko.

Dôležité je si teraz uvedomiť, že obe z vyššie uvedených možnosti nastanú približne rovnako často – teda ak sme mali v pondelok červené tričko, bude približne rovnako veľa utorkov, kedy máme oblečené červené tričko ako utorkov, kedy máme oblečené modré tričko.

Skúsme teraz pokračovať ďalej – v utorok opäť hádžeme mincou:

- Ak sme mali v utorok červené tričko, tak v stredu môžeme mať červené tričko (padlo číslo) alebo modré číslo (padol znak).
- Ak sme mali v utorok modré tričko, tak v stredu môžeme mať zelené tričko (padlo číslo) alebo žlté tričko (padol znak).

Čiže ak sme mali v pondelok oblečené červené tričko, tak v stredu si oblečieme tričko červenej farby, iba ak sme hodili dvakrát po sebe na minci číslo. Vo zvyšných troch prípadoch hádzania (číslo + znak, znak + číslo, znak + znak) budeme mať v stredu oblečené tričko inej farby ako červené. Teda iba v približne jednej štvrtine prípadov máme v stredu oblečené tričko červenej farby. Výsledok zapíšeme do prvého riadka tabuľky:

Aké tričko máme oblečené v pondelok	Čo musí padnúť na minci, aby aj v stredu sme mali tričko rovnakej farby ako v pondelok	Približne v akej časti prípadov sa to stane?
Červené	Číslo + Číslo	¼
Modré	Číslo + Znak	¼
Zelené	Znak + Číslo	¼
Žlté	Znak + Znak	¼

Situáciu sme postupne rovnakým spôsobom vyskúšali aj v prípadoch, že sme mali v pondelok oblečené modré, zelené alebo žlté tričko. Výsledok sme zapísali do ďalších riadkov tabuľky.

Ako vidíme, vo všetkých prípadoch nám vyšlo, že približne v štvrtine pokusov budeme mať v stredu tričko rovnakej farby ako v pondelok. Keďže rok má 52 týždňov, tak iba v približne štvrtine týždňov to bude platiť, teda v 13-tich.

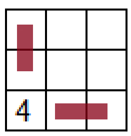
Zostáva spomenúť, že uvedené číslo je iba odhad. S veľkým kusom smoly alebo šťastia by sa mohlo stať, že v jednom roku to vyjde 0 alebo 52. No častejšie budú vychádzať čísla okolo hodnoty 13. Takisto ako v našom experimente spomenutom na začiatku úlohy – isto je možné, že keď budete hádzať mincou, tak budú padať samé znaky, ale oveľa častejšie nastane, že keď budete hádzať mincou, tak bude počet znakov a čísiel približne rovnaký.

Príklad č. 2 *(opravovala Barbora Marečáková)*

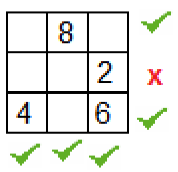
Takmer všetci ste správne odhalili, že čísla sa do mriežky uložiť nedajú. Väčšina z vás skúšaním prišla na to, že výsledný súčin v riadku alebo stĺpci musí obsahovať 4 alebo 8 alebo aj 2 aj 6, aby bol deliteľný 4. Ak teda v tomto súčine budeme mať 4 · 8 · 1, tak určite vieme, že výsledok bude deliteľný 4. Takisto ak to bude 2 · 6 · 3 alebo 4 · 3 · 7. Ak je niečo deliteľné 4, tak to tiež znamená, že sa dá to isté číslo napísať, ako súčin 4 a nejakého iného celého čísla.

- 4 = 4 · 1
- 8 = 4 · 2
- 2 · 6 = 12 = 4 · 3

Ďalšou časťou riešenia ste ukazovali, či vlastne vieme tieto kľúčové čísla uložiť tak, aby sme pokryli všetky súčiny – 3 riadkové a 3 stĺpcové. Pri uložení čísla 4 do tabuľky na ktorékoľvek miesto pokryjeme 1 riadok a 1 stĺpec, ako je naznačené na obrázku.

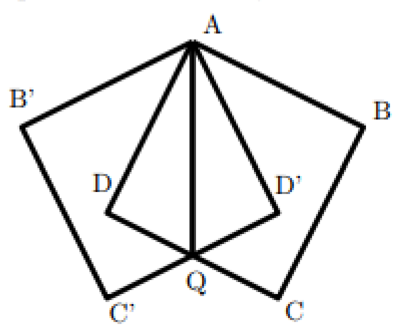


Rovnako je to aj pri 8. Ak ju uložíme niekde, tak pokryje 1 riadok a 1 stĺpec. Čiže, ak by sme do tabuľky pridali 8 tak, aby pokryla iný stĺpec a iný riadok ako 4, tak vieme pokryť len 2 riadky a 2 stĺpce – ešte nám chýba 1 riadok a 1 stĺpec a zostávajú čísla 2 a 6, ktoré ovplyvňujú deliteľnosť štvorkou.



Pri číslach 2 a 6 je to komplikovanejšie. Ony pokryjú len 1 riadok alebo 1 stĺpec, lebo deliteľnosť zabezpečia len, ak sú spoločne v súčine. To by znamenalo, že ak by sa nám ich aj podarilo správne uložiť, tak nám jeden riadok (alebo stĺpec) zostane o vynásobení čísel nedeliteľný číslom 4. **Teda čísla sa do mriežky nedajú uložiť.**

Príklad č. 3 *(opravovala Maťa Kudelčíková)*



Zo zadania máme zistiť povrch jazierka, ktorý predstavuje plochu 2 prekrývajúcich sa štvorcov, t.j. šesťuholníka ABCQC´B´.
Ako prvý krok môžeme vypočítať obsah jednotlivých 2 štvorcov s dĺžkami strán 4m – štvorca ABCD a štvorca AB´C´D´. Podľa vzorca na výpočet obsahu štvorca S = a*a, čiže v našom prípade (so stranami dĺžky 4) je to S=4*4 = 16m2. Keďže tie štvorce sú 2 (úplne rovnaké), ich obsah bude 16 + 16 = 32 m2.
Tieto štvorce sa však prekrývajú a my potrebujeme zistiť povrch jazierka, musíme preto od celého obsahu odpočítať obsah časti, v ktorej sa prekrývajú.
Ako to zistíme? Vidíme, že časť, kde sa prekrývajú, tvoria 2 rovnaké trojuholníky - keďže bod Q leží v strede strán CD a C´D´, to znamená, že ich rozdeľuje na polovicu (ostatné strany majú rovnaké). Stačí preto

vypočítať obsah jedného z trojuholníkov a vynásobiť ho 2. Navyše vieme, že tieto trojuholníky sú pravouhlé - pri bodoch D a D´ zvierajú pravý uhol, pretože je to časť štvorcov (ktoré majú každý uhol pravý). Preto obsah jedného z nich vypočítame ako S = (|DG| * |AD| / 2). Zápis |DG| označuje dĺžku strany DG, čo je, keďže bod Q rozdelil stranu CD na polovicu, 4/2 = 2 m. Dĺžku strany DA = |DA| vieme tiež, je to dĺžka jednej strany štvorca ABCD, čiže 4. Obsah trojuholníka ADQ bude preto S = (4*2/2).
Preto povrch (obsah) jazierka bude obsah štvorcov ABCD a AB´C´D´ mínus obsah trojuholníkov ADQ a AD´Q, čo je S = 16 + 16 – 2* 4 = 24 m2.

Príklad č. 4 (**opravovali Lenka a Miro Hudecovci**)

Máme 9 rybiek o ktorých rýchlosti nič nevieme. Chceme nájsť dve najrýchlejšie rybky usporiadaním pretekov po trojičkách a zároveň chceme, aby počet pretekov bol čo najmenší.

Na začiatok rozdelíme rybky do troch základných skupín, označme ich A, B a C a *pre každú skupinu zorganizujeme jeden pretek*. Víťazka každého z týchto pretekov je rýchlejšia, ako dve rybky, ktoré s ňou pretekali.

Vytvorme teraz trojicu z víťazných rybiek a nechajme pretekať tie. Víťazka tohto *štvrtého preteku* je určite najrýchlejšia rybka zo všetkých. Priamo vo svojej skupine alebo porazením víťaznej rybky z ostatných dvoch základných skupín predbehla všetky rybky.

Teraz ešte potrebujeme určiť, ktorá rybka je druhá najrýchlejšia. Poďme sa zamyslieť, ktoré pripadajú v úvahu.

Vieme, že to nebude rybka, ktorá skončila ako tretia vo štvrtom preteku, lebo ju v tomto preteku porazili dve iné rybky. Rovnako to nebudú rybky, ktoré boli s touto treťou rybkou v základnej skupine, keďže boli pomalšie ako ona sama. Tieto rybky už teda nebudeme ďalej zaraďovať do pretekov, nakoľko by to bolo zbytočné.

Ostala nám rybka, ktorá skončila vo štvrtom preteku druhá – označme ju D2. Nemá zmysel ďalej uvažovať nad rybkami z rovnakej základnej skupiny ako je D2, lebo sú od nej určite pomalšie. Tiež nám ostali rybky zo skupiny, odkiaľ je víťazka – o nich vieme, že sú pomalšie ako víťazka, ale môžu byť rýchlejšie ako D2. Necháme tieto tri rybky pretekať *v piatom preteku* a tá, ktorá vyhrá, je určite druhá najrýchlejšia.

Takto sa nám dve najrýchlejšie rybky s istotou podarilo určiť zorganizovaním piatich pretekov.